COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - ANALISI MATEMATICA C 7 settembre 2012
FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ♢ AUTLM ♢ MECLM/MECLT ♢ AUTLS/MATLS/MECLS ♢ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_V 6z\,dxdydz$ dove V è il dominio definito da
$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2x^2 + y^2 + 1} \le z \le 1 - x\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'area della superficie S definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{2x^2y^2}\,,\ x \ge 0\,, y \ge 0\,,\ x^2 + y^2 \le 1\}.$$

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n^2}}$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\beta \in \mathbb{R}^+$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\beta/3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) (x-7)^n \,, \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Si discuta, inoltre, la convergenza uniforme e la convergenza totale della serie, al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 7|x|$ e prolungata per periodicità; siano $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier. Calcolare tutti gli a_n e b_n e scrivere la serie di Fourier associata a f.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della sua serie di Fourier in $\mathbb{R}$, sulla base delle caratteristiche di f e/o dei coefficienti a_n e b_n. Avvalendosi dei risultati ottenuti nell'esercizio precedente, dimostrare che la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ vale $\frac{\pi^2}{8}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + \dfrac{e^{4t}}{y} \,, \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la monotonia delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra o no, motivando la risposta. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni all'estremo destro degli intervalli massimali.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} yy' = y^2 + e^{4t} \,, \\ y(0) = -1 \,. \end{cases}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.
(Sugg.: porre $z(t) = y^2(t)$, osservando che $2yy' = \frac{d}{dt}y^2$ ...)

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_V 6z\, dxdydz$ dove V è il dominio definito da
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2x^2+y^2+1} \le z \le 1-x\}$.
....
Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'area della superficie S definita da
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{2x^2y^2}\,,\ x \ge 0\,, y \ge 0\,,\ x^2+y^2 \le 1\}.$$
....
Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n^2}}$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.
....
Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\beta \in \mathbb{R}^+$. Si consideri la seguente serie di potenze
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\beta/3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(x-7)^n\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$
Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Si discuta, inoltre, la convergenza uniforme e la convergenza totale della serie, al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$.
....
Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x) = 7|x|$ e prolungata per periodicità; siano $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier. Calcolare tutti gli a_n e b_n e scrivere la serie di Fourier associata a f.
....
Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della sua serie di Fourier in $\mathbb{R}$, sulla base delle caratteristiche di f e/o dei coefficienti a_n e b_n. Avvalendosi dei risultati ottenuti nell'esercizio precedente, dimostrare che la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ vale $\frac{\pi^2}{8}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + \dfrac{e^{4t}}{y}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la monotonia delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra o no, motivando la risposta. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni all'estremo destro degli intervalli massimali.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} yy' = y^2 + e^{4t}\,, \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

(Sugg.: porre $z(t) = y^2(t)$, osservando che $2yy' = \frac{d}{dt}y^2$ ...)

. . . .

Risposta [3 punti]:
