COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DELL'8 GENNAIO 2007

1) Calcolare il il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + y^2 \leq z \leq 8 - 4x\}$.

2) Calcolare l'area della superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy,\ x^2 + y^2 \leq 3\}$.

3) Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ definita in $(0, +\infty)$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} & \text{se } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale ed uniforme; si calcoli l'integrale (generalizzato) $\int_0^b f_n(x)\,dx$ ove $b > 1$, si confronti il suo limite per $n \to +\infty$ con $\int_0^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$ e si commenti tale confronto.

4) Si studi la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2\sin x)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Si calcoli la sua funzione somma in un opportuno intorno di $x = 0$ (consiglio: porre $2\sin x = t$....).

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' \sin y \cos y = 0, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

6) Si consideri, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x \sin^2 y \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che tutte le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$, sono limitate e sono pari.
(b) Tracciare un grafico qualitativo della soluzione di

$$\begin{cases} y' = x \sin^2 y \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.