Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C 8 settembre 2011

FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: $\diamondsuit$ AUTLM $\diamondsuit$ MECLM/MECLT $\diamondsuit$ AUTLS/MATLS/MECLS $\diamondsuit$ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V \frac{1}{5}(x^2+y^2)\,dxdydz$ dove V è la parte di spazio compresa fra i cilindri $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$ ed i piani $z=-7$ e $z=7$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int\int_S z(2x+y)\,dS$, dove $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2=2\,,z\geq 0\,,x\geq 0\,,y\geq 0\,\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $[0,28\pi]$:

$$f_n(x)=\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{28}\right)^n .$$

   Si determini il limite puntuale f e si discuta la convergenza uniforme in tutto $[0,28\pi]$ e nei suoi sottoinsiemi *(può essere utile la sostituzione* $\sqrt{2}\cos\frac{x}{28}=t\ldots$*)*.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n} \right) n^{\alpha - 1}, \qquad x \in]0, +\infty[.$$

Si studi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale in $]0, +\infty[$ ed nei suoi sottoinsiemi *(si osservi che $g(t) = t - \sin t > 0$ per $t \in]0, +\infty[$).*

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 6\sin^2 x + \sin x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1, b_2.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(-\frac{\pi}{2})$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{y+2}{2\log(y+2)}$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia, convessità e flessi della soluzione al variare di y_0. L'intervallo massimale può essere illimitato a destra per qualche valore di y_0?

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione del problema di Cauchy $y' = \frac{y+2}{2\log(y+2)}$, $y(0) = 0$, verificare se l'intervallo massimale è illimitato a destra. Può essere illimitato a sinistra? Risolvere il problema di Cauchy con la condizione $y(0) = -\frac{3}{2}$ e confrontare la situazione con il caso precedente.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_V \frac{1}{5}(x^2+y^2)\,dxdydz$ dove V è la parte di spazio compresa fra i cilindri $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$ ed i piani $z=-7$ e $z=7$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S z(2x+y)\,dS$, dove $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2=2\,,z\geq 0\,,x\geq 0\,,y\geq 0\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $[0,28\pi]$:

$$f_n(x)=\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{28}\right)^n\,.$$

   Si determini il limite puntuale f e si discuta la convergenza uniforme in tutto $[0,28\pi]$ e nei suoi sottoinsiemi *(può essere utile la sostituzione $\sqrt{2}\cos\frac{x}{28}=t\ldots$).*

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Sia $\alpha\in\mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)n^{\alpha-1}\,,\qquad x\in]0,+\infty[\,.$$

   Si studi al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale in $]0,+\infty[$ ed nei suoi sottoinsiemi *(si osservi che $g(t)=t-\sin t>0$ per $t\in]0,+\infty[$).*

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da

$$f(x)=\begin{cases}6\sin^2x+\sin x & \text{se } -\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{altrimenti,}\end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1, b_2.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(-\frac{\pi}{2})$.

....

Risposta [3 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{y+2}{2\log(y+2)}$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia, convessità e flessi della soluzione al variare di y_0. L'intervallo massimale può essere illimitato a destra per qualche valore di y_0?

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione del problema di Cauchy $y' = \frac{y+2}{2\log(y+2)}$, $y(0) = 0$, verificare se l'intervallo massimale è illimitato a destra. Può essere illimitato a sinistra? Risolvere il problema di Cauchy con la condizione $y(0) = -\frac{3}{2}$ e confrontare la situazione con il caso precedente.

....

Risposta [5 punti]:
