Complementi di Analisi Matematica

Prova scritta del 9 Dicembre 2005

1. Calcolare il flusso del campo
$$\vec{F}(x,y,z) = (1 - x^2 - y^2 - z^2)e^x\,\vec{i}_1 + y\,\vec{i}_2 + z^3\,\vec{i}_3$$
attraverso la superficie della sfera centrata in $(0,0,0)$ e raggio 1, orientata tramite la normale esterna.

2. Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_D ze^y\,dxdydz$$
dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 \leq 4, x \leq 0, z \geq 0, x \leq y \leq 0\}$.

3. Sia data la successione di funioni
$$f_n(x) = e^{-nx}\left(1 + \frac{|x-1|}{n+1}\right).$$
   (a) Determinare l'insieme I di convergenza puntuale ed il limite puntuale $f : I \to \mathbb{R}$ di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Discutere la convergenza uniforme di f_n a f su $I \cap [\alpha, +\infty[$ con $\alpha \in [0,1]$.
   (c) Sia D_n l'insieme dei punti di derivabilità di f_n su I, e sia D quello di f. Si ha $D_n = D$ per ogni n? Commentare la risposta.

4. Sia data la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + \sin(1 + nx^2)}{n^\alpha + 1}.$$
Determinare al variare di α l'insieme I di convergenza puntuale e discutere la convergenza uniforme.

5. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 2xy' = e^{x^2} \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

6. Sia dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (1 - y^2)(1 + e^y)\arctan t \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$
con $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Dimostrare che esiste una ed una sola soluzione locale u del problema per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Sia $\alpha \in [-1,1]$. Dimostrare che u è definita su tutto $\mathbb{R}$ e calcolare i limiti $\lim_{t\to+\infty} u(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} u(t)$. Si determinino $\sup_{\mathbb{R}} u$ e $\inf_{\mathbb{R}} u$. Esistono punti nel dominio di u in cui tali valori sono assunti?
   (c) Sia $\alpha = 0$: calcolare $\lim_{t\to 0} \frac{u(t)}{t^2}$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.