Complementi di Analisi Matematica - Analisi Matematica C 9 febbraio 2012
FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Studi: ♢ AUTLM ♢ MECLM/MECLT ♢ AUTLS/MATLS/MECLS ♢ AMBLS/CIVLS

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2+2}\,dxdydz$ dove T è la parte di spazio compresa fra i paraboloidi $z = 2 + x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S \frac{2y^3x}{\sqrt{1+z^2}}\,dS$, dove S è la superficie di rappresentazione parametrica $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + e^{-u}\vec{k}$ con $-1 \le u \le 1$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{nx^2+2}.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Al variare di $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp(n^2(x^2-4))}{n^{2\alpha}\log n}$. Determinare gli intervalli di convergenza totale nei casi in cui, rispettivamente, $\alpha \in [0, \frac{1}{4})$ e $\alpha \in (\frac{3}{2}, +\infty)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f(x) = 7(|\cos x| - 1)\ x \in \mathbb{R}$. Sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier come funzione 2π-periodica. Calcolare a_0, a_1, b_1. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme della serie in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \arctan(y^2 - 4)\log^2(3-t)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia, limitatezza e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Risolvere il problema di Cauchy $y'(t) = \dfrac{t^2 + 2y^2(t)}{ty(t)}$ $\quad y(1) = 1$. *(suggerimento: porre $z = y/t \ldots$)*

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Sia Γ il bordo del rettangolo $R = [0,3] \times [0,2]$ percorso **due volte** in senso antiorario. Si calcoli

$$I = \int_\Gamma (x^2 y + \cos^3 x)dx + y \arctan x dy$$

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2+2}\,dxdydz$ dove T è la parte di spazio compresa fra i paraboloidi $z = 2 + x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

   . . . .

   Risposta [4 punti]:

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S \frac{2y^3x}{\sqrt{1+z^2}}\,dS$, dove S è la superficie di rappresentazione parametrica $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + e^{-u}\vec{k}$ con $-1 \le u \le 1$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

   . . . .

   Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{nx^2+2}.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   . . . .

   Risposta [4 punti]:

---

4. Al variare di $\alpha \ge 0$, studiare la convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp(n^2(x^2-4))}{n^{2\alpha}\log n}$. Determinare gli intervalli di convergenza totale nei casi in cui, rispettivamente, $\alpha \in [0, \frac{1}{4})$ e $\alpha \in (\frac{3}{2}, +\infty)$.

   . . . .

   Risposta [5 punti]:

---

5. Si consideri la funzione $f(x) = 7(|\cos x| - 1)$ $x \in \mathbb{R}$. Sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ la sua serie di Fourier come funzione 2π-periodica. Calcolare a_0, a_1, b_1. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme della serie in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f.

   . . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \arctan(y^2-4)\log^2(3-t)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia, limitatezza e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Risolvere il problema di Cauchy $y'(t) = \dfrac{t^2+2y^2(t)}{ty(t)} \quad y(1) = 1$. *(suggerimento: porre $z = y/t\ldots$)*

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Sia Γ il bordo del rettangolo $R = [0,3]\times[0,2]$ percorso **due volte** in senso antiorario. Si calcoli

$$I = \int_\Gamma (x^2y+\cos^3 x)dx + y\arctan x dy$$

....

Risposta [4 punti]:
