COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 9 SETTEMBRE 2008

1) Calcolare l'integrale triplo

$$\int\!\!\int\!\!\int_V 4z\, dxdydz\,,$$

dove V è la regione di spazio delimitata dal cilindro circolare di equazione $x^2 + (y-1)^2 = 1$, dalla superficie sferica di equazione $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e dal piano $z = 0$.

2) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x, y, z) = y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + (z + 1)\,\overrightarrow{k}$ uscente attraverso tutta la superficie del cono di equazione $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \geq 0$.

3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in $[0, 2\pi]$ da $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^\alpha}$. Si studi la convergenza puntuale e la convergenza uniforme in $[0, 2\pi]$. Si consideri poi la successione $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ e se ne studi la convergenza puntuale e la convergenza uniforme in $[0, 2\pi]$.

4) Si consideri la serie trigonometrica

$$(*) \qquad \frac{\pi^2}{3} - 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k)^2}$$

e se ne studi la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$.
Si consideri poi la funzione f periodica di periodo 2π, definita da

$$f(x) = 2x(\pi - x) \quad x \in [0, \pi)$$

prolungata per parità e si mostri che la serie $(*)$ è la sua serie di Fourier. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di tale serie di Fourier in $\mathbb{R}$, sulla base delle caratteristiche di f.

5) Calcolare la soluzione $\tilde{y}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{x}y' = \dfrac{1}{x^2}\,, \\ y(1) = 0\,, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

6) Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t}{t^2 - 1}y^2 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

(a) Studiare esistenza (locale e globale) ed unicità di soluzioni al variare di $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ e $y_0 \in \mathbb{R}^+$.
(b) Studiare la limitatezza e la monotonia delle soluzioni.
(c) Verificare le deduzioni teoriche con la soluzione esplicita del problema di Cauchy nel caso $t_0 = \sqrt{2}$ e $y_0 = 1$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.