COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 10 settembre 2010 . Il numero del compito è dato dall'intero ottenuto sottraendo 1 al coefficiente di π nella seconda condizione nell'esercizio 6 (ad esempio, $y'(1) = 4\pi$: compito 3).

COMPITO 1

1. 8π.
2. $\pi(1 - \cos 7)$.
3. converge puntualmente in $[0, +\infty[$ a $f(x)$ con $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1[$, $f(1) = \frac{7}{8}$, $f(x) = 7$ se $x \in]1, +\infty[$. Convergenza uniforme in $[0, b]$ con $0 < b < 1$ e in $[a + \infty[$ con $1 < a < +\infty$.
4. La condizione necessaria per la convergenza vale solo se $x \in [0, 1[$ e si vede (ad esempio con il criterio del rapporto) che converge puntualmente (e assolutamente) in $[0, 1[$; in modo analogo si vede che converge totalmente in $[0, b]$ con $0 < b < 1$.
5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2] = \frac{1}{2\pi}(1 - e^{-4\pi})$.
6. $y(t) = 4[(t^2 + 1) \arctan t - t]$.
7. $t(e^y - 2)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. $u(t) \equiv \log 2$ stazionaria. Se $y_0 > \log 2$ crescente per $t > 0$, se $y_0 < \log 2$ crescente per $t < 0$.
8. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 < \log 2$, in quanto $e^u - 2$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)} \leq e^{y_0}$), mentre, se $y_0 > \log 2$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale. Nel primo caso $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = -\infty$, nel secondo caso limite $+\infty$ verso gli asintoti verticali.

COMPITO 2

1. 27π.
2. $\pi(1 - \cos 6)$.
3. converge puntualmente in $[0, +\infty[$ a $f(x)$ con $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1[$, $f(1) = \frac{6}{7}$, $f(x) = 6$ se $x \in]1, +\infty[$. Convergenza uniforme in $[0, b]$ con $0 < b < 1$ e in $[a + \infty[$ con $1 < a < +\infty$.
4. La condizione necessaria per la convergenza vale solo se $x \in [0, 1[$ e si vede (ad esempio con il criterio del rapporto) che converge puntualmente (e assolutamente) in $[0, 1[$; in modo analogo si vede che converge totalmente in $[0, b]$ con $0 < b < 1$.
5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2] = \frac{1}{3\pi}(1 - e^{-6\pi})$.
6. $y(t) = 6[(t^2 + 1) \arctan t - t]$.
7. $t(e^y - 3)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. $u(t) \equiv \log 3$ stazionaria. Se $y_0 > \log 3$ crescente per $t > 0$, se $y_0 < \log 3$ crescente per $t < 0$.
8. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 < \log 3$, in quanto $e^u - 3$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)} \leq e^{y_0}$), mentre, se $y_0 > \log 3$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale. Nel primo caso $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = -\infty$, nel secondo caso limite $+\infty$ verso gli asintoti verticali.

COMPITO 3

1. 64π.
2. $\pi(1-\cos 5)$.
3. converge puntualmente in $[0,+\infty[$ a $f(x)$ con $f(x)=0$ se $x\in[0,1[$, $f(1)=\frac{5}{6}$, $f(x)=5$ se $x\in]1,+\infty[$. Convergenza uniforme in $[0,b]$ con $0<b<1$ e in $[a+\infty[$ con $1<a<+\infty$.
4. La condizione necessaria per la convergenza vale solo se $x\in[0,1[$ e si vede (ad esempio con il criterio del rapporto) che converge puntualmente (e assolutamente) in $[0,1[$; in modo analogo si vede che converge totalmente in $[0,b]$ con $0<b<1$.
5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2+b_n^2]=\frac{1}{4\pi}(1-e^{-8\pi})$.
6. $y(t)=8[(t^2+1)\arctan t-t]$.
7. $t(e^y-4)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. $u(t)\equiv\log 4$ stazionaria. Se $y_0>\log 4$ crescente per $t>0$, se $y_0<\log 4$ crescente per $t<0$.
8. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0<\log 4$, in quanto e^u-4 rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)}\le e^{y_0}$), mentre, se $y_0>\log 4$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale. Nel primo caso $\lim_{t\to\pm\infty}u(t)=-\infty$, nel secondo caso limite $+\infty$ verso gli asintoti verticali.

COMPITO 4

1. 125π.
2. $\pi(1-\cos 4)$.
3. converge puntualmente in $[0,+\infty[$ a $f(x)$ con $f(x)=0$ se $x\in[0,1[$, $f(1)=\frac{4}{5}$, $f(x)=4$ se $x\in]1,+\infty[$. Convergenza uniforme in $[0,b]$ con $0<b<1$ e in $[a+\infty[$ con $1<a<+\infty$.
4. La condizione necessaria per la convergenza vale solo se $x\in[0,1[$ e si vede (ad esempio con il criterio del rapporto) che converge puntualmente (e assolutamente) in $[0,1[$; in modo analogo si vede che converge totalmente in $[0,b]$ con $0<b<1$.
5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2+b_n^2]=\frac{1}{5\pi}(1-e^{-10\pi})$.
6. $y(t)=10[(t^2+1)\arctan t-t]$.
7. $t(e^y-5)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. $u(t)\equiv\log 5$ stazionaria. Se $y_0>\log 5$ crescente per $t>0$, se $y_0<\log 5$ crescente per $t<0$.
8. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0<\log 5$, in quanto e^u-5 rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)}\le e^{y_0}$), mentre, se $y_0>\log 5$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale. Nel primo caso $\lim_{t\to\pm\infty}u(t)=-\infty$, nel secondo caso limite $+\infty$ verso gli asintoti verticali.

COMPITO 5

1. 216π.

2. $\pi(1-\cos 3)$.

3. converge puntualmente in $[0,+\infty[$ a $f(x)$ con $f(x)=0$ se $x\in[0,1[$, $f(1)=\frac{3}{4}$, $f(x)=3$ se $x\in]1,+\infty[$. Convergenza uniforme in $[0,b]$ con $0<b<1$ e in $[a+\infty[$ con $1<a<+\infty$.

4. La condizione necessaria per la convergenza vale solo se $x\in[0,1[$ e si vede (ad esempio con il criterio del rapporto) che converge puntualmente (e assolutamente) in $[0,1[$; in modo analogo si vede che converge totalmente in $[0,b]$ con $0<b<1$.

5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2+b_n^2]=\frac{1}{6\pi}(1-e^{-12\pi})$.

6. $y(t)=12[(t^2+1)\arctan t-t]$.

7. $t(e^y-6)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. $u(t)\equiv\log 6$ stazionaria. Se $y_0>\log 6$ crescente per $t>0$, se $y_0<\log 6$ crescente per $t<0$.

8. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0<\log 6$, in quanto e^u-6 rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)}\le e^{y_0}$), mentre, se $y_0>\log 6$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale. Nel primo caso $\lim_{t\to\pm\infty}u(t)=-\infty$, nel secondo caso limite $+\infty$ verso gli asintoti verticali.

COMPITO 6

1. 343π.

2. $\pi(1-\cos 2)$.

3. converge puntualmente in $[0,+\infty[$ a $f(x)$ con $f(x)=0$ se $x\in[0,1[$, $f(1)=\frac{2}{3}$, $f(x)=2$ se $x\in]1,+\infty[$. Convergenza uniforme in $[0,b]$ con $0<b<1$ e in $[a+\infty[$ con $1<a<+\infty$.

4. La condizione necessaria per la convergenza vale solo se $x\in[0,1[$ e si vede (ad esempio con il criterio del rapporto) che converge puntualmente (e assolutamente) in $[0,1[$; in modo analogo si vede che converge totalmente in $[0,b]$ con $0<b<1$.

5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; con l'uguaglianza di Parseval $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2+b_n^2]=\frac{1}{7\pi}(1-e^{-14\pi})$.

6. $y(t)=14[(t^2+1)\arctan t-t]$.

7. $t(e^y-7)$ è C^1 ma non sublineare, quindi esistenza ed unicità locali. $u(t)\equiv\log 7$ stazionaria. Se $y_0>\log 7$ crescente per $t>0$, se $y_0<\log 7$ crescente per $t<0$.

8. L'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0<\log 7$, in quanto e^u-7 rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{u(t)}\le e^{y_0}$), mentre, se $y_0>\log 7$, la soluzione esplode (quindi due asintoti verticali) per la illimitatezza dell'esponenziale. Nel primo caso $\lim_{t\to\pm\infty}u(t)=-\infty$, nel secondo caso limite $+\infty$ verso gli asintoti verticali.
