COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 18 gennaio 2011.

Il numero del compito è dato dall'addendo costante nella funzione dell'esercizio 5.

COMPITO 1

1. $\frac{9}{2}\pi$.
2. 14π.
3. $I = [-1, 1]$ e la funzione limite $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da: $f(x) = 0$ se $|x| < 1$, $f(x) = \pm\frac{3\pi}{4}$ se $x = \pm 1$. Su $[-1, 1]$ la convergenza non è uniforme (f è discontinua in $x = \pm 1$), ma lo è negli intervalli del tipo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.
4. la serie converge puntualmente in $[0, \frac{1}{7}[$ e totalmente in $[0, a]$ con $0 < a < \frac{1}{7}$.
5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; $a_0 = 6$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$.
6. $y(t) = -3 \cos e^t$.
7. $\arctan \frac{y^2-49}{y^2+49}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata, quindi esistenza ed unicità globali; per $y_0 = \pm 7$, si hanno soluzioni stazionarie; se $y_0 > 7$ o $y_0 < -7$ soluzione u crescente, se $-7 < y_0 < 7$ decrescente; se $y_0 > 7$ o $-7 < y_0 < 7$ asintoto orizzontale $u = 7$ per $t \to -\infty$; se $y_0 < -7$ o $-7 < y_0 < 7$ asintoto orizzontale $u = -7$ per $t \to +\infty$. Convessa se $y_0 > 7$; concava se $y_0 < -7$; se $-7 < y_0 < 7$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$, quindi concava prima di t_0 e convessa dopo t_0.
8. 3π.

COMPITO 2

1. $\frac{25}{2}\pi$.
2. 12π.
3. $I = [-1, 1]$ e la funzione limite $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da: $f(x) = 0$ se $|x| < 1$, $f(x) = \pm\frac{5\pi}{4}$ se $x = \pm 1$. Su $[-1, 1]$ la convergenza non è uniforme (f è discontinua in $x = \pm 1$), ma lo è negli intervalli del tipo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.
4. la serie converge puntualmente in $[0, \frac{1}{6}[$ e totalmente in $[0, a]$ con $0 < a < \frac{1}{6}$.
5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; $a_0 = 8$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$.
6. $y(t) = -5 \cos e^t$.
7. $\arctan \frac{y^2-36}{y^2+36}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata, quindi esistenza ed unicità globali; per $y_0 = \pm 6$, si hanno soluzioni stazionarie; se $y_0 > 6$ o $y_0 < -6$ soluzione u crescente, se $-6 < y_0 < 6$ decrescente; se $y_0 > 6$ o $-6 < y_0 < 6$ asintoto orizzontale $u = 6$ per $t \to -\infty$; se $y_0 < -6$ o $-6 < y_0 < 6$ asintoto orizzontale $u = -6$ per $t \to +\infty$. Convessa se $y_0 > 6$; concava se $y_0 < -6$; se $-6 < y_0 < 6$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$, quindi concava prima di t_0 e convessa dopo t_0.
8. 12π.

COMPITO 3

1. $\frac{49}{2}\pi$.

2. 10π.

3. $I = [-1, 1]$ e la funzione limite $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da: $f(x) = 0$ se $|x| < 1$, $f(x) = \pm\frac{7\pi}{4}$ se $x = \pm 1$. Su $[-1, 1]$ la convergenza non è uniforme (f è discontinua in $x = \pm 1$), ma lo è negli intervalli del tipo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.

4. la serie converge puntualmente in $[0, \frac{1}{5}[$ e totalmente in $[0, a]$ con $0 < a < \frac{1}{5}$.

5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; $a_0 = 10$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$.

6. $y(t) = -7 \cos e^t$.

7. $\arctan \frac{y^2-25}{y^2+25}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata, quindi esistenza ed unicità globali; per $y_0 = \pm 5$, si hanno soluzioni stazionarie; se $y_0 > 5$ o $y_0 < -5$ soluzione u crescente, se $-5 < y_0 < 5$ decrescente; se $y_0 > 5$ o $-5 < y_0 < 5$ asintoto orizzontale $u = 5$ per $t \to -\infty$; se $y_0 < -5$ o $-5 < y_0 < 5$ asintoto orizzontale $u = -5$ per $t \to +\infty$. Convessa se $y_0 > 5$; concava se $y_0 < -5$; se $-5 < y_0 < 5$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$, quindi concava prima di t_0 e convessa dopo t_0.

8. 27π.

COMPITO 4

1. $\frac{81}{2}\pi$.

2. 8π.

3. $I = [-1, 1]$ e la funzione limite $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da: $f(x) = 0$ se $|x| < 1$, $f(x) = \pm\frac{9\pi}{4}$ se $x = \pm 1$. Su $[-1, 1]$ la convergenza non è uniforme (f è discontinua in $x = \pm 1$), ma lo è negli intervalli del tipo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.

4. la serie converge puntualmente in $[0, \frac{1}{4}[$ e totalmente in $[0, a]$ con $0 < a < \frac{1}{4}$.

5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; $a_0 = 12$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$.

6. $y(t) = -9 \cos e^t$.

7. $\arctan \frac{y^2-16}{y^2+16}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata, quindi esistenza ed unicità globali; per $y_0 = \pm 4$, si hanno soluzioni stazionarie; se $y_0 > 4$ o $y_0 < -4$ soluzione u crescente, se $-4 < y_0 < 4$ decrescente; se $y_0 > 4$ o $-4 < y_0 < 4$ asintoto orizzontale $u = 4$ per $t \to -\infty$; se $y_0 < -4$ o $-4 < y_0 < 4$ asintoto orizzontale $u = -4$ per $t \to +\infty$. Convessa se $y_0 > 4$; concava se $y_0 < -4$; se $-4 < y_0 < 4$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$, quindi concava prima di t_0 e convessa dopo t_0.

8. 48π.

COMPITO 5

1. $\frac{121}{2}\pi$.

2. 6π.

3. $I = [-1, 1]$ e la funzione limite $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da: $f(x) = 0$ se $|x| < 1$, $f(x) = \pm\frac{11\pi}{4}$ se $x = \pm 1$. Su $[-1, 1]$ la convergenza non è uniforme (f è discontinua in $x = \pm 1$), ma lo è negli intervalli del tipo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.

4. la serie converge puntualmente in $[0, \frac{1}{3}[$ e totalmente in $[0, a]$ con $0 < a < \frac{1}{3}$.

5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; $a_0 = 14$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$.

6. $y(t) = -11 \cos e^t$.

7. $\arctan \frac{y^2-9}{y^2+9}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata, quindi esistenza ed unicità globali; per $y_0 = \pm 3$, si hanno soluzioni stazionarie; se $y_0 > 3$ o $y_0 < -3$ soluzione u crescente, se $-3 < y_0 < 3$ decrescente; se $y_0 > 3$ o $-3 < y_0 < 3$ asintoto orizzontale $u = 3$ per $t \to -\infty$; se $y_0 < -3$ o $-3 < y_0 < 3$ asintoto orizzontale $u = -3$ per $t \to +\infty$. Convessa se $y_0 > 3$; concava se $y_0 < -3$; se $-3 < y_0 < 3$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$, quindi concava prima di t_0 e convessa dopo t_0.

8. 75π.

COMPITO 6

1. $\frac{169}{2}\pi$.

2. 4π.

3. $I = [-1, 1]$ e la funzione limite $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da: $f(x) = 0$ se $|x| < 1$, $f(x) = \pm\frac{13\pi}{4}$ se $x = \pm 1$. Su $[-1, 1]$ la convergenza non è uniforme (f è discontinua in $x = \pm 1$), ma lo è negli intervalli del tipo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.

4. la serie converge puntualmente in $[0, \frac{1}{2}[$ e totalmente in $[0, a]$ con $0 < a < \frac{1}{2}$.

5. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ ad f perché è C^1 a tratti; $a_0 = 16$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$.

6. $y(t) = -13 \cos e^t$.

7. $\arctan \frac{y^2-4}{y^2+4}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e limitata, quindi esistenza ed unicità globali; per $y_0 = \pm 2$, si hanno soluzioni stazionarie; se $y_0 > 2$ o $y_0 < -2$ soluzione u crescente, se $-2 < y_0 < 2$ decrescente; se $y_0 > 2$ o $-2 < y_0 < 2$ asintoto orizzontale $u = 2$ per $t \to -\infty$; se $y_0 < -2$ o $-2 < y_0 < 2$ asintoto orizzontale $u = -2$ per $t \to +\infty$. Convessa se $y_0 > 2$; concava se $y_0 < -2$; se $-2 < y_0 < 2$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$, quindi concava prima di t_0 e convessa dopo t_0.

8. 108π.
