COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 19 aprile 2011.

Il numero del compito è dato dalla metà del coefficiente di $\sqrt{x^2+y^2}$ nell'integrale triplo.

COMPITO 1

1. 5π
2. $5\sqrt{2}\pi$
3. converge puntualmente (ma non uniformemente) a $f(x) \equiv 0$ in tutto $\mathbb{R}$: c'è convergenza uniforme nei sottoinsiemi limitati superiormente. Il limite vale $\frac{1}{2}\pi$ (l'integrale è l'area di un semicerchio).
4. raggio 7 indipendente da α, converge anche in ± 7 se $\alpha > 1$.
5. $\beta = \frac{1}{14}$.
6. $y(t) = 7[1 + 3t + \frac{1}{2}\sin 2t]$.
7. $\log\left(\log^2 y + \frac{1}{2}\right)$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ quindi esistenza ed unicità locali; $y_0 = e^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}}}$, $u(t) \equiv e^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}}}$ soluzioni stazionarie. Se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}$ o $y_0 > e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ soluzione u crescente.
8. Per la sublinearità e la limitatezza l'intervallo massimale di esistenza è illimitato se $y_0 > e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}$; nel caso $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}$ l'intervallo massimale è illimitato solo a destra. Se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$, mentre se $0 < y_0 < e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Convessa se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$; concava se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}$; se $e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}} < y_0 < e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$ (con $u(t_0) = 1$), quindi concava per $t < t_0$ e convessa per $t > t_0$.

COMPITO 2

1. 10π
2. $10\sqrt{2}\pi$
3. converge puntualmente (ma non uniformemente) a $f(x) \equiv 0$ in tutto $\mathbb{R}$: c'è convergenza uniforme nei sottoinsiemi limitati superiormente. Il limite vale 2π (l'integrale è l'area di un semicerchio).
4. raggio 6 indipendente da α, converge anche in ± 6 se $\alpha > 2$.
5. $\beta = \frac{1}{12}$.
6. $y(t) = 6[1 + 3t + \frac{1}{2}\sin 2t]$.
7. $\log\left(\log^2 y + \frac{1}{3}\right)$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ quindi esistenza ed unicità locali; $y_0 = e^{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}}$, $u(t) \equiv e^{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}}$ soluzioni stazionarie. Se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$ o $y_0 > e^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ soluzione u crescente.
8. Per la sublinearità e la limitatezza l'intervallo massimale di esistenza è illimitato se $y_0 > e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$; nel caso $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$ l'intervallo massimale è illimitato solo a destra. Se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$, mentre se $0 < y_0 < e^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$. Convessa se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$; concava se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$; se $e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}} < y_0 < e^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$ (con $u(t_0) = 1$), quindi concava per $t < t_0$ e convessa per $t > t_0$.

COMPITO 3

1. 15π
2. $15\sqrt{2}\pi$
3. converge puntualmente (ma non uniformemente) a $f(x) \equiv 0$ in tutto $\mathbb{R}$: c'è convergenza uniforme nei sottoinsiemi limitati superiormente. Il limite vale $\frac{9}{2}\pi$ (l'integrale è l'area di un semicerchio).
4. raggio 5 indipendente da α, converge anche in ± 5 se $\alpha > 3$.
5. $\beta = \frac{1}{10}$.
6. $y(t) = 5[1 + 3t + \frac{1}{2}\sin 2t]$.
7. $\log\left(\log^2 y + \frac{1}{4}\right)$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ quindi esistenza ed unicità locali; $y_0 = e^{\pm\sqrt{\frac{3}{4}}}$, $u(t) \equiv e^{\pm\sqrt{\frac{3}{4}}}$ soluzioni stazionarie. Se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}}$ o $y_0 > e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ soluzione u crescente.
8. Per la sublinearità e la limitatezza l'intervallo massimale di esistenza è illimitato se $y_0 > e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}}$; nel caso $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}}$ l'intervallo massimale è illimitato solo a destra. Se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$, mentre se $0 < y_0 < e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}}$. Convessa se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$; concava se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}}$; se $e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}} < y_0 < e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$ (con $u(t_0) = 1$), quindi concava per $t < t_0$ e convessa per $t > t_0$.

COMPITO 4

1. 20π
2. $20\sqrt{2}\pi$
3. converge puntualmente (ma non uniformemente) a $f(x) \equiv 0$ in tutto $\mathbb{R}$: c'è convergenza uniforme nei sottoinsiemi limitati superiormente. Il limite vale 8π (l'integrale è l'area di un semicerchio).
4. raggio 4 indipendente da α, converge anche in ± 4 se $\alpha > 4$.
5. $\beta = \frac{1}{8}$.
6. $y(t) = 4[1 + 3t + \frac{1}{2}\sin 2t]$.
7. $\log\left(\log^2 y + \frac{1}{5}\right)$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ quindi esistenza ed unicità locali; $y_0 = e^{\pm\sqrt{\frac{4}{5}}}$, $u(t) \equiv e^{\pm\sqrt{\frac{4}{5}}}$ soluzioni stazionarie. Se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{4}{5}}}$ o $y_0 > e^{\sqrt{\frac{4}{5}}}$ soluzione u crescente.
8. Per la sublinearità e la limitatezza l'intervallo massimale di esistenza è illimitato se $y_0 > e^{-\sqrt{\frac{4}{5}}}$; nel caso $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{4}{5}}}$ l'intervallo massimale è illimitato solo a destra. Se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{4}{5}}}$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$, mentre se $0 < y_0 < e^{\sqrt{\frac{4}{5}}}$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = e^{-\sqrt{\frac{4}{5}}}$. Convessa se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{4}{5}}}$; concava se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{4}{5}}}$; se $e^{-\sqrt{\frac{4}{5}}} < y_0 < e^{\sqrt{\frac{4}{5}}}$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$ (con $u(t_0) = 1$), quindi concava per $t < t_0$ e convessa per $t > t_0$.

COMPITO 5

1. 25π
2. $25\sqrt{2}\pi$
3. converge puntualmente (ma non uniformemente) a $f(x) \equiv 0$ in tutto $\mathbb{R}$: c'è convergenza uniforme nei sottoinsiemi limitati superiormente. Il limite vale $\frac{25}{2}\pi$ (l'integrale è l'area di un semicerchio).
4. raggio 3 indipendente da α, converge anche in ± 3 se $\alpha > 5$.
5. $\beta = \frac{1}{6}$.
6. $y(t) = 3[1 + 3t + \frac{1}{2}\sin 2t]$.
7. $\log\left(\log^2 y + \frac{1}{6}\right)$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ quindi esistenza ed unicità locali; $y_0 = e^{\pm\sqrt{\frac{5}{6}}}$, $u(t) \equiv e^{\pm\sqrt{\frac{5}{6}}}$ soluzioni stazionarie. Se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{5}{6}}}$ o $y_0 > e^{\sqrt{\frac{5}{6}}}$ soluzione u crescente.
8. Per la sublinearità e la limitatezza l'intervallo massimale di esistenza è illimitato se $y_0 > e^{-\sqrt{\frac{5}{6}}}$; nel caso $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{5}{6}}}$ l'intervallo massimale è illimitato solo a destra. Se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{5}{6}}}$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$, mentre se $0 < y_0 < e^{\sqrt{\frac{5}{6}}}$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = e^{-\sqrt{\frac{5}{6}}}$. Convessa se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{5}{6}}}$; concava se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{5}{6}}}$; se $e^{-\sqrt{\frac{5}{6}}} < y_0 < e^{\sqrt{\frac{5}{6}}}$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$ (con $u(t_0) = 1$), quindi concava per $t < t_0$ e convessa per $t > t_0$.

COMPITO 6

1. 30π
2. $30\sqrt{2}\pi$
3. converge puntualmente (ma non uniformemente) a $f(x) \equiv 0$ in tutto $\mathbb{R}$: c'è convergenza uniforme nei sottoinsiemi limitati superiormente. Il limite vale 18π (l'integrale è l'area di un semicerchio).
4. raggio 2 indipendente da α, converge anche in ± 2 se $\alpha > 6$.
5. $\beta = \frac{1}{4}$.
6. $y(t) = 2[1 + 3t + \frac{1}{2}\sin 2t]$.
7. $\log\left(\log^2 y + \frac{1}{7}\right)$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ quindi esistenza ed unicità locali; $y_0 = e^{\pm\sqrt{\frac{6}{7}}}$, $u(t) \equiv e^{\pm\sqrt{\frac{6}{7}}}$ soluzioni stazionarie. Se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{6}{7}}}$ o $y_0 > e^{\sqrt{\frac{6}{7}}}$ soluzione u crescente.
8. Per la sublinearità e la limitatezza l'intervallo massimale di esistenza è illimitato se $y_0 > e^{-\sqrt{\frac{6}{7}}}$; nel caso $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{6}{7}}}$ l'intervallo massimale è illimitato solo a destra. Se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{6}{7}}}$, $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$, mentre se $0 < y_0 < e^{\sqrt{\frac{6}{7}}}$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = e^{-\sqrt{\frac{6}{7}}}$. Convessa se $y_0 > e^{\sqrt{\frac{6}{7}}}$; concava se $0 < y_0 < e^{-\sqrt{\frac{6}{7}}}$; se $e^{-\sqrt{\frac{6}{7}}} < y_0 < e^{\sqrt{\frac{6}{7}}}$ esiste un punto di flesso $t_0 \in \mathbb{R}$ (con $u(t_0) = 1$), quindi concava per $t < t_0$ e convessa per $t > t_0$.