COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA/ANALISI MATEMATICA C- 25 marzo 2013.

Il numero del compito è dato dalla metà del coefficiente di $\cos x$ nell'esercizio 5.

COMPITO 1

1. Si può procedere mediante una riduzione per fili con $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D\,,\ \sqrt{7} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}\}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\,, x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$. Risulta 1/15.
2. $2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$
3. Si ha convergenza puntuale su $[-7, 0]$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-7, b]$, con $-7 < b < 0$.
4. La serie converge puntualmente in $A = [0, 9[$. Applicando, ad esempio, il teorema di derivazione per serie a $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, t^n$ si ottiene $\left(\frac{2}{3-\sqrt{x}}\right)^2$ come somma per $x \in A$.
5. $a_0 = 0$, $a_1 = 1 + \frac{8}{\pi^2}$, $b_1 = 0$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(2\pi) = 2$, $S(\frac{5}{2}\pi) = 0$, $S(3\pi) = -2$.
7. $f(t,y) = \frac{\sqrt{y^2+2}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra per $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (vale la stima di sublinearità sulla soluzione) e, se $y_0 > 0$, la soluzione u è concava e tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, mentre se $y_0 < 0$, la soluzione u è convessa e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.
8. $\tilde{u}(t) = \sqrt{(t+2)^2 - 2}$; $\tilde{u}$ definita in $[-2 + \sqrt{2}, +\infty[$, quindi intervallo illimitato a destra; $\lim_{t\to+\infty} \tilde{u}(t) = +\infty$, $y = t + 2$ equazione dell'asintoto obliquo.

COMPITO 2

1. Si può procedere mediante una riduzione per fili con $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D\,,\ \sqrt{6} \leq z \leq \sqrt{7 - x^2 - y^2}\}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\,, x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$. Risulta 1/15.
2. $2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
3. Si ha convergenza puntuale su $[-6, 0]$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-6, b]$, con $-6 < b < 0$.
4. La serie converge puntualmente in $A = [0, 16[$. Applicando, ad esempio, il teorema di derivazione per serie a $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, t^n$ si ottiene $\left(\frac{3}{4-\sqrt{x}}\right)^2$ come somma per $x \in A$.
5. $a_0 = 0$, $a_1 = 2 + \frac{16}{\pi^2}$, $b_1 = 0$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(4\pi) = 4$, $S(\frac{9}{2}\pi) = 0$, $S(5\pi) = -4$.
7. $f(t,y) = \frac{\sqrt{y^2+3}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra per $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (vale la stima di sublinearità sulla soluzione) e, se $y_0 > 0$, la soluzione u è concava e tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, mentre se $y_0 < 0$, la soluzione u è convessa e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

8. $\tilde{u}(t) = \sqrt{(t+3)^2-3}$; $\tilde{u}$ definita in $[-3+\sqrt{3}, +\infty[$, quindi intervallo illimitato a destra; $\lim_{t\to+\infty} \tilde{u}(t) = +\infty$, $y = t+3$ equazione dell'asintoto obliquo.

COMPITO 3

1. Si può procedere mediante una riduzione per fili con $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D\,,\ \sqrt{5} \le z \le \sqrt{6-x^2-y^2}\}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 1\,, x \ge 0\,,\ y \ge 0\}$. Risulta 1/15.

2. $2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$

3. Si ha convergenza puntuale su $[-5, 0]$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-5, b]$, con $-5 < b < 0$.

4. La serie converge puntualmente in $A = [0, 25[$. Applicando, ad esempio, il teorema di derivazione per serie a $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,t^n$ si ottiene $\left(\frac{4}{5-\sqrt{x}}\right)^2$ come somma per $x \in A$.

5. $a_0 = 0$, $a_1 = 3 + \frac{24}{\pi^2}$, $b_1 = 0$.

6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(6\pi) = 6$, $S(\frac{13}{2}\pi) = 0$, $S(7\pi) = -6$.

7. $f(t,y) = \frac{\sqrt{y^2+4}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra per $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (vale la stima di sublinearità sulla soluzione) e, se $y_0 > 0$, la soluzione u è concava e tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, mentre se $y_0 < 0$, la soluzione u è convessa e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

8. $\tilde{u}(t) = \sqrt{(t+4)^2-4}$; $\tilde{u}$ definita in $[-4+\sqrt{4}, +\infty[$, quindi intervallo illimitato a destra; $\lim_{t\to+\infty} \tilde{u}(t) = +\infty$, $y = t+4$ equazione dell'asintoto obliquo.

COMPITO 4

1. Si può procedere mediante una riduzione per fili con $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D\,,\ \sqrt{4} \le z \le \sqrt{5-x^2-y^2}\}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 1\,, x \ge 0\,,\ y \ge 0\}$. Risulta 1/15.

2. $2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$

3. Si ha convergenza puntuale su $[-4, 0]$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-4, b]$, con $-4 < b < 0$.

4. La serie converge puntualmente in $A = [0, 36[$. Applicando, ad esempio, il teorema di derivazione per serie a $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,t^n$ si ottiene $\left(\frac{5}{6-\sqrt{x}}\right)^2$ come somma per $x \in A$.

5. $a_0 = 0$, $a_1 = 4 + \frac{32}{\pi^2}$, $b_1 = 0$.

6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(8\pi) = 8$, $S(\frac{17}{2}\pi) = 0$, $S(9\pi) = -8$.

7. $f(t,y) = \frac{\sqrt{y^2+5}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra per $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (vale la stima di sublinearità sulla soluzione) e, se $y_0 > 0$, la soluzione u è concava e tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, mentre se $y_0 < 0$, la soluzione u è convessa e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

8. $\tilde{u}(t) = \sqrt{(t+5)^2-5}$; $\tilde{u}$ definita in $[-5+\sqrt{5}, +\infty[$, quindi intervallo illimitato a destra; $\lim_{t\to+\infty} \tilde{u}(t) = +\infty$, $y = t+5$ equazione dell'asintoto obliquo.

COMPITO 5

1. Si può procedere mediante una riduzione per fili con $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D\,,\ \sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1\,, x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$. Risulta 1/15.
2. $2\pi\left(1-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$
3. Si ha convergenza puntuale su $[-3,0]$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-3,b]$, con $-3 < b < 0$.
4. La serie converge puntualmente in $A = [0,49[$. Applicando, ad esempio, il teorema di derivazione per serie a $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,t^n$ si ottiene $\left(\frac{6}{7-\sqrt{x}}\right)^2$ come somma per $x \in A$.
5. $a_0 = 0$, $a_1 = 5 + \frac{40}{\pi^2}$, $b_1 = 0$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(10\pi) = 10$, $S(\frac{21}{2}\pi) = 0$, $S(11\pi) = -10$.
7. $f(t,y) = \frac{\sqrt{y^2+6}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra per $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (vale la stima di sublinearità sulla soluzione) e, se $y_0 > 0$, la soluzione u è concava e tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, mentre se $y_0 < 0$, la soluzione u è convessa e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.
8. $\tilde{u}(t) = \sqrt{(t+6)^2-6}$; $\tilde{u}$ definita in $[-6+\sqrt{6}, +\infty[$, quindi intervallo illimitato a destra; $\lim_{t\to+\infty} \tilde{u}(t) = +\infty$, $y = t+6$ equazione dell'asintoto obliquo.

COMPITO 6

1. Si può procedere mediante una riduzione per fili con $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D\,,\ \sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{3-x^2-y^2}\}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1\,, x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$. Risulta 1/15.
2. $2\pi\left(1-\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$
3. Si ha convergenza puntuale su $[-2,0]$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[-2,b]$, con $-2 < b < 0$.
4. La serie converge puntualmente in $A = [0,64[$. Applicando, ad esempio, il teorema di derivazione per serie a $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,t^n$ si ottiene $\left(\frac{7}{8-\sqrt{x}}\right)^2$ come somma per $x \in A$.
5. $a_0 = 0$, $a_1 = 6 + \frac{48}{\pi^2}$, $b_1 = 0$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(12\pi) = 12$, $S(\frac{25}{2}\pi) = 0$, $S(13\pi) = -12$.
7. $f(t,y) = \frac{\sqrt{y^2+7}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra per $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (vale la stima di sublinearità sulla soluzione) e, se $y_0 > 0$, la soluzione u è concava e tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, mentre se $y_0 < 0$, la soluzione u è convessa e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

8. $\tilde{u}(t) = \sqrt{(t+7)^2 - 7}$; $\tilde{u}$ definita in $[-7+\sqrt{7}, +\infty[$, quindi intervallo illimitato a destra; $\lim_{t\to+\infty} \tilde{u}(t) = +\infty$, $y = t + 7$ equazione dell'asintoto obliquo.
