COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA/ANALISI MATEMATICA C- 2 APRILE 2012.

Il numero del compito è dato dall'intero sottratto ad α nell'esercizio 4.

COMPITO 1

1. si applica il teorema della divergenza, $\text{div}\vec{F} = 4x^2 + 2$ si ottiene 21π.
2. si applica il teorema di Stokes alle circonferenze $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\, z = 0\}$ (percorsa in senso antiorario e l'integrale è nullo) e $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\, z = 7\}$ (percorsa in senso orario), risulta 7π.
3. Si ha convergenza puntuale in tutto $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x < 6$, $f(6) = \frac{1}{7}$, $f(x) = 1$ se $x > 6$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > 6$ e $]-\infty, b]$ con $b < 6$.
4. Raggio ∞ se $\alpha > 1$; raggio 0 se $\alpha < 1$; raggio 2 se $\alpha = 1$, sul bordo converge in $x = 2$. Nel caso $\alpha = 2$ la somma è $2(1 - e^{-x/2})$.
5. $a_0 = 14 + \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ per $n \in \mathbb{Z}^+$.
6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è continua a tratti. $S(2\pi) = 7$, $S(3\pi) = 7 + \frac{\pi}{2}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi} = -\frac{\pi}{12}$.
7. $\frac{(y-2)^2}{t^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t) = 2$. Se $y_0 \neq 2$ soluzione u crescente. $u = l_1$ con $2 \leq l_1 < y_0$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ se $y_0 > 2$ (e l'intervallo massimale è illimitato a sinistra), $u = l_2$ con $y_0 < l_2 \leq 2$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ se $y_0 < 2$ (e l'intervallo massimale è illimitato a destra).
8. La soluzione del problema è $u(t) = 2 + \frac{1}{1 - \arctan t}$ definita in $]-\infty, \tan 1[$, quindi l'intervallo massimale è limitato a destra (d'altra parte il secondo membro non era sublineare...), mentre lo è a sinistra, perché la soluzione è limitata inferiormente. La soluzione generale è $u(t) = 2 + \frac{y_0 - 2}{1 - (y_0 - 2)\arctan t}$ e l'intervallo di esistenza $]-\infty, \bar{t}[$ diminuisce se $y_0 > 3$ aumenta (il denominatore si annulla per $\arctan \bar{t} = 1/(y_0 - 2)$).

COMPITO 2

1. si applica il teorema della divergenza, $\text{div}\vec{F} = 4x^2 + 2$ si ottiene 18π.
2. si applica il teorema di Stokes alle circonferenze $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\, z = 0\}$ (percorsa in senso antiorario e l'integrale è nullo) e $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\, z = 6\}$ (percorsa in senso orario), risulta 6π.
3. Si ha convergenza puntuale in tutto $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x < 5$, $f(5) = \frac{1}{6}$, $f(x) = 1$ se $x > 5$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > 5$ e $]-\infty, b]$ con $b < 5$.
4. Raggio ∞ se $\alpha > 2$; raggio 0 se $\alpha < 2$; raggio 3 se $\alpha = 2$, sul bordo converge in $x = 3$. Nel caso $\alpha = 3$ la somma è $3(1 - e^{-x/3})$.
5. $a_0 = 12 + \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ per $n \in \mathbb{Z}^+$.
6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è continua a tratti. $S(2\pi) = 6$, $S(5\pi) = 6 + \frac{\pi}{2}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi} = -\frac{\pi}{12}$.

7. $\frac{(y-3)^2}{t^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t) = 3$. Se $y_0 \neq 3$ soluzione u crescente. $u = l_1$ con $3 \leq l_1 < y_0$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ se $y_0 > 3$ (e l'intervallo massimale è illimitato a sinistra), $u = l_2$ con $y_0 < l_2 \leq 3$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ se $y_0 < 3$ (e l'intervallo massimale è illimitato a destra).

8. La soluzione del problema è $u(t) = 3 + \frac{1}{1-\arctan t}$ definita in $]-\infty, \tan 1[$, quindi l'intervallo massimale è limitato a destra (d'altra parte il secondo membro non era sublineare...), mentre lo è a sinistra, perché la soluzione è limitata inferiormente. La soluzione generale è $u(t) = 3 + \frac{y_0-3}{1-(y_0-3)\arctan t}$ e l'intervallo di esistenza $]-\infty, \bar{t}[$ diminuisce se $y_0 > 4$ aumenta (il denominatore si annulla per $\arctan \bar{t} = 1/(y_0-3)$).

COMPITO 3

1. si applica il teorema della divergenza, $\mathrm{div}\vec{F} = 4x^2 + 2$ si ottiene 15π.

2. si applica il teorema di Stokes alle circonferenze $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0\}$ (percorsa in senso antiorario e l'integrale è nullo) e $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 5\}$ (percorsa in senso orario), risulta 5π.

3. Si ha convergenza puntuale in tutto $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x < 4$, $f(4) = \frac{1}{5}$, $f(x) = 1$ se $x > 4$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > 4$ e $]-\infty, b]$ con $b < 4$.

4. Raggio ∞ se $\alpha > 3$; raggio 0 se $\alpha < 3$; raggio 4 se $\alpha = 3$, sul bordo converge in $x = 4$. Nel caso $\alpha = 4$ la somma è $4(1 - e^{-x/4})$.

5. $a_0 = 10 + \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ per $n \in \mathbb{Z}^+$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è continua a tratti. $S(2\pi) = 5$, $S(7\pi) = 5 + \frac{\pi}{2}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi} = -\frac{\pi}{12}$.

7. $\frac{(y-4)^2}{t^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t) = 4$. Se $y_0 \neq 4$ soluzione u crescente. $u = l_1$ con $4 \leq l_1 < y_0$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ se $y_0 > 4$ (e l'intervallo massimale è illimitato a sinistra), $u = l_2$ con $y_0 < l_2 \leq 4$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ se $y_0 < 4$ (e l'intervallo massimale è illimitato a destra).

8. La soluzione del problema è $u(t) = 4 + \frac{1}{1-\arctan t}$ definita in $]-\infty, \tan 1[$, quindi l'intervallo massimale è limitato a destra (d'altra parte il secondo membro non era sublineare...), mentre lo è a sinistra, perché la soluzione è limitata inferiormente. La soluzione generale è $u(t) = 4 + \frac{y_0-4}{1-(y_0-4)\arctan t}$ e l'intervallo di esistenza $]-\infty, \bar{t}[$ diminuisce se $y_0 > 5$ aumenta (il denominatore si annulla per $\arctan \bar{t} = 1/(y_0-4)$).

COMPITO 4

1. si applica il teorema della divergenza, $\mathrm{div}\vec{F} = 4x^2 + 2$ si ottiene 12π.

2. si applica il teorema di Stokes alle circonferenze $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0\}$ (percorsa in senso antiorario e l'integrale è nullo) e $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 4\}$ (percorsa in senso orario), risulta 4π.

3. Si ha convergenza puntuale in tutto $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x < 3$, $f(3) = \frac{1}{4}$, $f(x) = 1$ se $x > 3$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > 3$ e $]-\infty, b]$ con $b < 3$.

4. Raggio ∞ se $\alpha > 4$; raggio 0 se $\alpha < 4$; raggio 5 se $\alpha = 4$, sul bordo converge in $x = 5$. Nel caso $\alpha = 5$ la somma è $5(1 - e^{-x/5})$.

5. $a_0 = 8 + \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ per $n \in \mathbb{Z}^+$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è continua a tratti. $S(2\pi) = 4$, $S(9\pi) = 4 + \frac{\pi}{2}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi} = -\frac{\pi}{12}$.

7. $\frac{(y-5)^2}{t^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t) = 5$. Se $y_0 \neq 5$ soluzione u crescente. $u = l_1$ con $5 \leq l_1 < y_0$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ se $y_0 > 5$ (e l'intervallo massimale è illimitato a sinistra), $u = l_2$ con $y_0 < l_2 \leq 5$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ se $y_0 < 5$ (e l'intervallo massimale è illimitato a destra).

8. La soluzione del problema è $u(t) = 5 + \frac{1}{1 - \arctan t}$ definita in $]-\infty, \tan 1[$, quindi l'intervallo massimale è limitato a destra (d'altra parte il secondo membro non era sublineare...), mentre lo è a sinistra, perché la soluzione è limitata inferiormente. La soluzione generale è $u(t) = 5 + \frac{y_0 - 5}{1 - (y_0 - 5)\arctan t}$ e l'intervallo di esistenza $]-\infty, \bar{t}[$ diminuisce se $y_0 > 6$ aumenta (il denominatore si annulla per $\arctan \bar{t} = 1/(y_0 - 5)$).

COMPITO 5

1. si applica il teorema della divergenza, $\text{div}\vec{F} = 4x^2 + 2$ si ottiene 9π.

2. si applica il teorema di Stokes alle circonferenze $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\, z = 0\}$ (percorsa in senso antiorario e l'integrale è nullo) e $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\, z = 3\}$ (percorsa in senso orario), risulta 3π.

3. Si ha convergenza puntuale in tutto $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x < 2$, $f(2) = \frac{1}{3}$, $f(x) = 1$ se $x > 2$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > 2$ e $]-\infty, b]$ con $b < 2$.

4. Raggio ∞ se $\alpha > 5$; raggio 0 se $\alpha < 5$; raggio 6 se $\alpha = 5$, sul bordo converge in $x = 6$. Nel caso $\alpha = 6$ la somma è $6(1 - e^{-x/6})$.

5. $a_0 = 6 + \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ per $n \in \mathbb{Z}^+$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è continua a tratti. $S(2\pi) = 3$, $S(11\pi) = 3 + \frac{\pi}{2}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi} = -\frac{\pi}{12}$.

7. $\frac{(y-6)^2}{t^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t) = 6$. Se $y_0 \neq 6$ soluzione u crescente. $u = l_1$ con $6 \leq l_1 < y_0$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ se $y_0 > 6$ (e l'intervallo massimale è illimitato a sinistra), $u = l_2$ con $y_0 < l_2 \leq 6$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ se $y_0 < 6$ (e l'intervallo massimale è illimitato a destra).

8. La soluzione del problema è $u(t) = 6 + \frac{1}{1 - \arctan t}$ definita in $]-\infty, \tan 1[$, quindi l'intervallo massimale è limitato a destra (d'altra parte il secondo membro non era sublineare...), mentre lo è a sinistra, perché la soluzione è limitata inferiormente. La soluzione generale è $u(t) = 6 + \frac{y_0 - 6}{1 - (y_0 - 6)\arctan t}$ e l'intervallo di esistenza $]-\infty, \bar{t}[$ diminuisce se $y_0 > 7$ aumenta (il denominatore si annulla per $\arctan \bar{t} = 1/(y_0 - 6)$).

COMPITO 6

1. si applica il teorema della divergenza, div$\vec{F} = 4x^2 + 2$ si ottiene 6π.

2. si applica il teorema di Stokes alle circonferenze $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\, z = 0\}$ (percorsa in senso antiorario e l'integrale è nullo) e $C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,,\, z = 2\}$ (percorsa in senso orario), risulta 2π.

3. Si ha convergenza puntuale in tutto $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$ se $x < 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(x) = 1$ se $x > 1$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a, +\infty[$, con $a > 1$ e $]-\infty, b]$ con $b < 1$.

4. Raggio ∞ se $\alpha > 6$; raggio 0 se $\alpha < 6$; raggio 7 se $\alpha = 6$, sul bordo converge in $x = 7$. Nel caso $\alpha = 7$ la somma è $7(1 - e^{-x/7})$.

5. $a_0 = 4 + \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ per $n \in \mathbb{Z}^+$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è continua a tratti. $S(2\pi) = 2$, $S(13\pi) = 2 + \frac{\pi}{2}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi} = -\frac{\pi}{12}$.

7. $\frac{(y-7)^2}{t^2+1}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t) = 7$. Se $y_0 \neq 7$ soluzione u crescente. $u = l_1$ con $7 \leq l_1 < y_0$ è asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ se $y_0 > 7$ (e l'intervallo massimale è illimitato a sinistra), $u = l_2$ con $y_0 < l_2 \leq 7$ è asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ se $y_0 < 7$ (e l'intervallo massimale è illimitato a destra).

8. La soluzione del problema è $u(t) = 7 + \frac{1}{1 - \arctan t}$ definita in $]-\infty, \tan 1[$, quindi l'intervallo massimale è limitato a destra (d'altra parte il secondo membro non era sublineare...), mentre lo è a sinistra, perché la soluzione è limitata inferiormente. La soluzione generale è $u(t) = 7 + \frac{y_0 - 7}{1 - (y_0 - 7)\arctan t}$ e l'intervallo di esistenza $]-\infty, \bar{t}[$ diminuisce se $y_0 > 8$ aumenta (il denominatore si annulla per $\arctan \bar{t} = 1/(y_0 - 7)$).