COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA/ANALISI MATEMATICA C- 2 LUGLIO 2012.

Il numero del compito è dato dal coefficiente di $\cos x$ (diminuito di 1) nell'esercizio 5.

COMPITO 1

1. $\frac{4\pi}{2^{3/2}}$
2. $14(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
3. Si ha convergenza puntuale in $I=[0,7]$ alla funzione $f(x)=0$; la convergenza è anche uniforme, poiché $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| = f_n(\frac{7n}{1+n}) = \frac{7}{1+n}(1+\frac{1}{n})^{-n}$ che è infinitesimo per $n\to+\infty$.
4. Raggio $\frac{1}{7}$ indipendentemente da $\alpha\in\mathbb{R}^+$, quindi convergenza assoluta in $]\frac{6}{7},\frac{8}{7}[$. Se $\alpha>1$ si ha convergenza uniforme in tutto l'intervallo chiuso $[\frac{6}{7},\frac{8}{7}]$. Se $0<\alpha\le 1$ si ha convergenza uniforme in $[\frac{6}{7},b]$, $\forall b$ con $\frac{6}{7}<b<\frac{8}{7}$
5. $a_0=0$ e $3b_2=\frac{2}{\pi}$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(2\pi)=2$, $S(3\pi)=-2$
7. $2t(e^{2y}-1)e^{-2y}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t)=0$. La soluzione è pari. Se $y_0>0$ soluzione u crescente in $]0,+\infty[$, decrescente in $]-\infty,0[$, $t=0$ punto di minimo assoluto. Se $y_0<0$ soluzione u crescente in $]-\infty,0[$, decrescente $]0,+\infty[$, $t=0$ punto di massimo assoluto. Non ci sono asintoti orizzontali. L'intervallo massimale della soluzione u è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0>0$, in quanto $|1-e^{-2u}|$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{-2u}\le e^{-2y_0}$). Questo non può essere affermato per $y_0<0$.
8. La soluzione del problema è $u(t)=\frac{1}{2}\log(1-\frac{1}{2}e^{2t^2})$ definita in $]-\bar{t},\bar{t}[$, dove $\bar{t}=\sqrt{\frac{\log 2}{2}}$ (annulla l'argomento del logaritmo....) quindi l'intervallo massimale è limitato e $t=\pm\bar{t}$ sono asintoti verticali. Notare che per $y<0$ il secondo membro non era sublineare.

COMPITO 2

1. $\frac{4\pi}{3^{3/2}}$
2. $12(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
3. Si ha convergenza puntuale in $I=[0,6]$ alla funzione $f(x)=0$; la convergenza è anche uniforme, poiché $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| = f_n(\frac{6n}{1+n}) = \frac{6}{1+n}(1+\frac{1}{n})^{-n}$ che è infinitesimo per $n\to+\infty$.
4. Raggio $\frac{1}{6}$ indipendentemente da $\alpha\in\mathbb{R}^+$, quindi convergenza assoluta in $]\frac{5}{6},\frac{7}{6}[$. Se $\alpha>1$ si ha convergenza uniforme in tutto l'intervallo chiuso $[\frac{5}{6},\frac{7}{6}]$. Se $0<\alpha\le 1$ si ha convergenza uniforme in $[\frac{5}{6},b]$, $\forall b$ con $\frac{5}{6}<b<\frac{7}{6}$
5. $a_0=0$ e $3b_2=\frac{3}{\pi}$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(2\pi)=3$, $S(5\pi)=-3$
7. $2t(e^{3y}-1)e^{-3y}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t)=0$. La soluzione è pari. Se $y_0>0$ soluzione u crescente in $]0,+\infty[$, decrescente in $]-\infty,0[$, $t=0$ punto di minimo assoluto. Se $y_0<0$ soluzione u crescente in $]-\infty,0[$, decrescente $]0,+\infty[$, $t=0$ punto di massimo assoluto. Non ci sono asintoti orizzontali. L'intervallo massimale della soluzione u è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0>0$, in quanto $|1-e^{-3u}|$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{-3u}\le e^{-3y_0}$). Questo non può essere affermato per $y_0<0$.

8. La soluzione del problema è $u(t) = \frac{1}{3}\log(1 - \frac{1}{2}e^{3t^2})$ definita in $]-\bar{t}, \bar{t}[$, dove $\bar{t} = \sqrt{\frac{\log 2}{3}}$ (annulla l'argomento del logaritmo....) quindi l'intervallo massimale è limitato e $t = \pm\bar{t}$ sono asintoti verticali. Notare che per $y < 0$ il secondo membro non era sublineare.

COMPITO 3

1. $\frac{4\pi}{4^{3/2}}$
2. $10(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
3. Si ha convergenza puntuale in $I = [0, 5]$ alla funzione $f(x) = 0$; la convergenza è anche uniforme, poiché $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\frac{5n}{1+n}) = \frac{5}{1+n}(1 + \frac{1}{n})^{-n}$ che è infinitesimo per $n \to +\infty$.
4. Raggio $\frac{1}{5}$ indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}^+$, quindi convergenza assoluta in $]\frac{4}{5}, \frac{6}{5}[$. Se $\alpha > 1$ si ha convergenza uniforme in tutto l'intervallo chiuso $[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}]$. Se $0 < \alpha \leq 1$ si ha convergenza uniforme in $[\frac{4}{5}, b]$, $\forall b$ con $\frac{4}{5} < b < \frac{6}{5}$
5. $a_0 = 0$ e $3b_2 = \frac{4}{\pi}$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(2\pi) = 4$, $S(7\pi) = -4$
7. $2t(e^{4y} - 1)e^{-4y}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t) = 0$. La soluzione è pari. Se $y_0 > 0$ soluzione u crescente in $]0, +\infty[$, decrescente in $]-\infty, 0[$, $t = 0$ punto di minimo assoluto. Se $y_0 < 0$ soluzione u crescente in $]-\infty, 0[$, decrescente $]0, +\infty[$, $t = 0$ punto di massimo assoluto. Non ci sono asintoti orizzontali. L'intervallo massimale della soluzione u è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 > 0$, in quanto $|1-e^{-4u}|$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{-4u} \leq e^{-4y_0}$). Questo non può essere affermato per $y_0 < 0$.
8. La soluzione del problema è $u(t) = \frac{1}{4}\log(1 - \frac{1}{2}e^{4t^2})$ definita in $]-\bar{t}, \bar{t}[$, dove $\bar{t} = \sqrt{\frac{\log 2}{4}}$ (annulla l'argomento del logaritmo....) quindi l'intervallo massimale è limitato e $t = \pm\bar{t}$ sono asintoti verticali. Notare che per $y < 0$ il secondo membro non era sublineare.

COMPITO 4

1. $\frac{4\pi}{5^{3/2}}$
2. $8(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
3. Si ha convergenza puntuale in $I = [0, 4]$ alla funzione $f(x) = 0$; la convergenza è anche uniforme, poiché $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\frac{4n}{1+n}) = \frac{4}{1+n}(1 + \frac{1}{n})^{-n}$ che è infinitesimo per $n \to +\infty$.
4. Raggio $\frac{1}{4}$ indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}^+$, quindi convergenza assoluta in $]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}[$. Se $\alpha > 1$ si ha convergenza uniforme in tutto l'intervallo chiuso $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$. Se $0 < \alpha \leq 1$ si ha convergenza uniforme in $[\frac{3}{4}, b]$, $\forall b$ con $\frac{3}{4} < b < \frac{5}{4}$
5. $a_0 = 0$ e $3b_2 = \frac{5}{\pi}$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(2\pi) = 5$, $S(9\pi) = -5$
7. $2t(e^{5y} - 1)e^{-5y}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t) = 0$. La soluzione è pari. Se $y_0 > 0$ soluzione u crescente in $]0, +\infty[$, decrescente in $]-\infty, 0[$, $t = 0$ punto di minimo assoluto. Se $y_0 < 0$ soluzione u crescente in $]-\infty, 0[$, decrescente $]0, +\infty[$, $t = 0$ punto di massimo assoluto. Non ci sono asintoti orizzontali.

L'intervallo massimale della soluzione u è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 > 0$, in quanto $|1-e^{-5u}|$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{-5u} \le e^{-5y_0}$). Questo non può essere affermato per $y_0 < 0$.

8. La soluzione del problema è $u(t) = \frac{1}{5}\log(1-\frac{1}{2}e^{5t^2})$ definita in $]-\bar{t},\bar{t}[$, dove $\bar{t} = \sqrt{\frac{\log 2}{5}}$ (annulla l'argomento del logaritmo....) quindi l'intervallo massimale è limitato e $t = \pm\bar{t}$ sono asintoti verticali. Notare che per $y < 0$ il secondo membro non era sublineare.

COMPITO 5

1. $\frac{4\pi}{6^{3/2}}$
2. $6(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
3. Si ha convergenza puntuale in $I = [0,3]$ alla funzione $f(x) = 0$; la convergenza è anche uniforme, poiché $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = f_n(\frac{3n}{1+n}) = \frac{3}{1+n}(1+\frac{1}{n})^{-n}$ che è infinitesimo per $n \to +\infty$.
4. Raggio $\frac{1}{3}$ indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}^+$, quindi convergenza assoluta in $]\frac{2}{3},\frac{4}{3}[$. Se $\alpha > 1$ si ha convergenza uniforme in tutto l'intervallo chiuso $[\frac{2}{3},\frac{4}{3}]$. Se $0 < \alpha \le 1$ si ha convergenza uniforme in $[\frac{2}{3}, b]$, $\forall b$ con $\frac{2}{3} < b < \frac{4}{3}$
5. $a_0 = 0$ e $3b_2 = \frac{6}{\pi}$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(2\pi) = 6$, $S(11\pi) = -6$
7. $2t(e^{6y}-1)e^{-6y}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t) = 0$. La soluzione è pari. Se $y_0 > 0$ soluzione u crescente in $]0,+\infty[$, decrescente in $]-\infty,0[$, $t = 0$ punto di minimo assoluto. Se $y_0 < 0$ soluzione u crescente in $]-\infty,0[$, decrescente $]0,+\infty[$, $t = 0$ punto di massimo assoluto. Non ci sono asintoti orizzontali. L'intervallo massimale della soluzione u è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 > 0$, in quanto $|1-e^{-6u}|$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{-6u} \le e^{-6y_0}$). Questo non può essere affermato per $y_0 < 0$.
8. La soluzione del problema è $u(t) = \frac{1}{6}\log(1-\frac{1}{2}e^{6t^2})$ definita in $]-\bar{t},\bar{t}[$, dove $\bar{t} = \sqrt{\frac{\log 2}{6}}$ (annulla l'argomento del logaritmo....) quindi l'intervallo massimale è limitato e $t = \pm\bar{t}$ sono asintoti verticali. Notare che per $y < 0$ il secondo membro non era sublineare.

COMPITO 6

1. $\frac{4\pi}{7^{3/2}}$
2. $4(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
3. Si ha convergenza puntuale in $I = [0,2]$ alla funzione $f(x) = 0$; la convergenza è anche uniforme, poiché $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = f_n(\frac{2n}{1+n}) = \frac{2}{1+n}(1+\frac{1}{n})^{-n}$ che è infinitesimo per $n \to +\infty$.
4. Raggio $\frac{1}{2}$ indipendentemente da $\alpha \in \mathbb{R}^+$, quindi convergenza assoluta in $]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$. Se $\alpha > 1$ si ha convergenza uniforme in tutto l'intervallo chiuso $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$. Se $0 < \alpha \le 1$ si ha convergenza uniforme in $[\frac{1}{2}, b]$, $\forall b$ con $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{2}$
5. $a_0 = 0$ e $3b_2 = \frac{7}{\pi}$.
6. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché f è C^1 a tratti. $S(2\pi) = 7$, $S(13\pi) = -7$

7. $2t(e^{7y}-1)e^{-7y}$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è sublineare rispetto ad y, quindi esistenza ed unicità locali. Soluzione stazionaria $u(t)=0$. La soluzione è pari. Se $y_0>0$ soluzione u crescente in $]0,+\infty[$, decrescente in $]-\infty,0[$, $t=0$ punto di minimo assoluto. Se $y_0<0$ soluzione u crescente in $]-\infty,0[$, decrescente $]0,+\infty[$, $t=0$ punto di massimo assoluto. Non ci sono asintoti orizzontali. L'intervallo massimale della soluzione u è tutto $\mathbb{R}$ se $y_0>0$, in quanto $|1-e^{-7u}|$ rimane limitato per il comportamento dell'esponenziale ($e^{-7u}\le e^{-7y_0}$). Questo non può essere affermato per $y_0<0$.

8. La soluzione del problema è $u(t)=\frac{1}{7}\log(1-\frac{1}{2}e^{7t^2})$ definita in $]-\bar{t},\bar{t}[$, dove $\bar{t}=\sqrt{\frac{\log 2}{7}}$ (annulla l'argomento del logaritmo....) quindi l'intervallo massimale è limitato e $t=\pm\bar{t}$ sono asintoti verticali. Notare che per $y<0$ il secondo membro non era sublineare.