COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA/ANALISI MATEMATICA C- 3 luglio 2013.

Il numero del compito è dato dalla metà del coefficiente di x nell'esercizio 5.

COMPITO 1

1. Conviene evidentemente un cambiamento di variabili di coordinate polari cilindriche; risulta $2\pi \log 2$.
2. Applicando il teorema di Stokes, si calcola l'integrale curvilineo sul bordo della corona circolare $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2\, , z = 1\}$ e si ottiene π.
3. Si ha convergenza puntuale su $]0, 7]$ alla funzione $f \equiv 0$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $]0, a]$, con $0 < a < 7$.
4. La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.
5. $a_0 = \pi$, $a_n = 0$ se n è pari ≥ 2, $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$.
6. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ perché f è solo C^0 a tratti. $S(2\pi) = 0$, $S(\frac{5}{2}\pi) = \pi$, $S(3\pi) = \pi$.
7. $f(t, y) = e^{y-3}(y - 2)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 2$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 2$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 2$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ e $u = 2$ è asintoto orizzontale; mentre per $y_0 < 2$ è illimitato anche a destra (vale la stima di sublinearità sulla soluzione $e^u \le e^{y_0}$...); inoltre se $y_0 < 2$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 1$) e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$. Se $y_0 > 2$, la soluzione u è convessa nel suo intervallo di esistenza.
8. $\tilde{y}(t) = -\log(7 - t)$.

COMPITO 2

1. Conviene evidentemente un cambiamento di variabili di coordinate polari cilindriche; risulta $2\pi \log 3$.
2. Applicando il teorema di Stokes, si calcola l'integrale curvilineo sul bordo della corona circolare $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 \le 3\, , z = 1\}$ e si ottiene 2π.
3. Si ha convergenza puntuale su $]0, 6]$ alla funzione $f \equiv 0$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $]0, a]$, con $0 < a < 6$.
4. La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.
5. $a_0 = 2\pi$, $a_n = 0$ se n è pari ≥ 2, $a_n = -\frac{8}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n}$.
6. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ perché f è solo C^0 a tratti. $S(4\pi) = 0$, $S(\frac{9}{2}\pi) = 2\pi$, $S(5\pi) = 2\pi$.
7. $f(t, y) = e^{y-4}(y - 3)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 3$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 3$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 3$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ e $u = 3$ è asintoto orizzontale; mentre per $y_0 < 3$ è illimitato anche a destra (vale la stima di sublinearità sulla soluzione $e^u \le e^{y_0}$...); inoltre se $y_0 < 3$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 2$) e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$. Se $y_0 > 3$, la soluzione u è convessa nel suo intervallo di esistenza.

8. $\tilde{y}(t) = -\log(6-t)$.

COMPITO 3

1. Conviene evidentemente un cambiamento di variabili di coordinate polari cilindriche; risulta $2\pi \log 4$.

2. Applicando il teorema di Stokes, si calcola l'integrale curvilineo sul bordo della corona circolare $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \,, z = 1\}$ e si ottiene 3π.

3. Si ha convergenza puntuale su $]0, 5]$ alla funzione $f \equiv 0$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $]0, a]$, con $0 < a < 5$.

4. La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.

5. $a_0 = 3\pi$, $a_n = 0$ se n è pari ≥ 2, $a_n = -\frac{12}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = (-1)^{n+1}\frac{6}{n}$.

6. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ perché f è solo C^0 a tratti. $S(6\pi) = 0$, $S(\frac{13}{2}\pi) = 3\pi$, $S(7\pi) = 3\pi$.

7. $f(t, y) = e^{y-5}(y-4)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 4$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 4$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 4$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ e $u = 4$ è asintoto orizzontale; mentre per $y_0 < 4$ è illimitato anche a destra (vale la stima di sublinearità sulla soluzione $e^u \leq e^{y_0}$...); inoltre se $y_0 < 4$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 3$) e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$. Se $y_0 > 4$, la soluzione u è convessa nel suo intervallo di esistenza.

8. $\tilde{y}(t) = -\log(5-t)$.

COMPITO 4

1. Conviene evidentemente un cambiamento di variabili di coordinate polari cilindriche; risulta $2\pi \log 5$.

2. Applicando il teorema di Stokes, si calcola l'integrale curvilineo sul bordo della corona circolare $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5 \,, z = 1\}$ e si ottiene 4π.

3. Si ha convergenza puntuale su $]0, 4]$ alla funzione $f \equiv 0$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $]0, a]$, con $0 < a < 4$.

4. La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.

5. $a_0 = 4\pi$, $a_n = 0$ se n è pari ≥ 2, $a_n = -\frac{16}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = (-1)^{n+1}\frac{8}{n}$.

6. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ perché f è solo C^0 a tratti. $S(8\pi) = 0$, $S(\frac{17}{2}\pi) = 4\pi$, $S(9\pi) = 4\pi$.

7. $f(t, y) = e^{y-6}(y-5)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 5$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 5$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 5$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ e $u = 5$ è asintoto orizzontale; mentre per $y_0 < 5$ è illimitato anche a destra (vale la stima di sublinearità sulla soluzione $e^u \leq e^{y_0}$...); inoltre se $y_0 < 5$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 4$) e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$. Se $y_0 > 5$, la soluzione u è convessa nel suo intervallo di esistenza.

8. $\tilde{y}(t) = -\log(4-t)$.

COMPITO 5

1. Conviene evidentemente un cambiamento di variabili di coordinate polari cilindriche; risulta $2\pi \log 6$.

2. Applicando il teorema di Stokes, si calcola l'integrale curvilineo sul bordo della corona circolare $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 6\,, z = 1\}$ e si ottiene 5π.

3. Si ha convergenza puntuale su $]0, 3]$ alla funzione $f \equiv 0$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $]0, a]$, con $0 < a < 3$.

4. La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.

5. $a_0 = 5\pi$, $a_n = 0$ se n è pari ≥ 2, $a_n = -\frac{20}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = (-1)^{n+1}\frac{10}{n}$.

6. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ perché f è solo C^0 a tratti. $S(10\pi) = 0$, $S(\frac{21}{2}\pi) = 5\pi$, $S(11\pi) = 5\pi$.

7. $f(t, y) = e^{y-7}(y - 6)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 6$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 6$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 6$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ e $u = 6$ è asintoto orizzontale; mentre per $y_0 < 6$ è illimitato anche a destra (vale la stima di sublinearità sulla soluzione $e^u \leq e^{y_0}$...); inoltre se $y_0 < 6$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 5$) e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$. Se $y_0 > 6$, la soluzione u è convessa nel suo intervallo di esistenza.

8. $\tilde{y}(t) = -\log(3 - t)$.

COMPITO 6

1. Conviene evidentemente un cambiamento di variabili di coordinate polari cilindriche; risulta $2\pi \log 7$.

2. Applicando il teorema di Stokes, si calcola l'integrale curvilineo sul bordo della corona circolare $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 7\,, z = 1\}$ e si ottiene 6π.

3. Si ha convergenza puntuale su $]0, 2]$ alla funzione $f \equiv 0$. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $]0, a]$, con $0 < a < 2$.

4. La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.

5. $a_0 = 6\pi$, $a_n = 0$ se n è pari ≥ 2, $a_n = -\frac{24}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = (-1)^{n+1}\frac{12}{n}$.

6. Converge puntualmente (ma non uniformemente) in tutto $\mathbb{R}$ perché f è solo C^0 a tratti. $S(12\pi) = 0$, $S(\frac{25}{2}\pi) = 6\pi$, $S(13\pi) = 6\pi$.

7. $f(t, y) = e^{y-8}(y - 7)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 7$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 7$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 7$ soluzione u crescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ e $u = 7$ è asintoto orizzontale; mentre per $y_0 < 7$ è illimitato anche a destra (vale la stima di sublinearità sulla soluzione $e^u \leq e^{y_0}$...); inoltre se $y_0 < 7$, la soluzione u è concava per $t < t^*$ (con $u(t^*) = 6$) e tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$. Se $y_0 > 7$, la soluzione u è convessa nel suo intervallo di esistenza.

8. $\tilde{y}(t) = -\log(2 - t)$.
