COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA/ANALISI MATEMATICA C- 6 FEBBRAIO 2013.

Il numero del compito è dato dal numeratore del coefficiente di xy nell'esercizio 8.

COMPITO 1

1. si applica il teorema della divergenza, $\text{div}\vec{F} = -\sin x + 4y^3 + 3(1-z)$ si ottiene $\frac{3\pi}{4}$.
2. 6
3. Si ha convergenza uniforme su $[-2, 2]$ alla funzione $f \equiv 0$.
4. La serie converge puntualmente su $[0, +\infty[$ e totalmente su ogni intervallo del tipo $[0, M]$, con $M > 0$.
5. $a_0 = 2$, $a_1 = -1$. Basta osservare che $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ e quindi $f(x) = 1 - \cos x$ coincide con il proprio sviluppo di Fourier. Usando in questo caso banale l'uguaglianza di Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 3\pi$.
6. $y(t) = -\frac{2}{t} - \frac{3}{2t^2} + 2$.
7. $f(t, y) = (y-2)e^y$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 2$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 2$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 2$ soluzione u crescente. Valutando la stima della sublinearità sulla soluzione, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a sinistra, per $y_0 < 2$ lo è anche a destra. Per $t \to -\infty$ la soluzione ammette $y = 2$ come asintoto orizzontale, se $y_0 \neq 2$, mentre se $y_0 < 2$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ (per il teorema dell'asintoto) e non ammette asintoto obliquo. Se $y_0 > 2$ soluzione u convessa; se $y_0 < 2$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = 1$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti.
8. Si applica il teorema di Green alla semicorona circolare D; calcolando $\iint_D -\frac{3}{7}y\, dxdy$, risulta -2

COMPITO 2

1. si applica il teorema della divergenza, $\text{div}\vec{F} = -\sin x + 6y^5 + 5(1-z)$ si ottiene $\frac{5\pi}{4}$.
2. 5
3. Si ha convergenza uniforme su $[-3, 3]$ alla funzione $f \equiv 0$.
4. La serie converge puntualmente su $[0, +\infty[$ e totalmente su ogni intervallo del tipo $[0, M]$, con $M > 0$.
5. $a_0 = 4$, $a_1 = -2$. Basta osservare che $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ e quindi $f(x) = 2 - 2\cos x$ coincide con il proprio sviluppo di Fourier. Usando in questo caso banale l'uguaglianza di Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 12\pi$.
6. $y(t) = -\frac{4}{t} - \frac{5}{2t^2} + 4$.
7. $f(t, y) = (y-3)e^y$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 3$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 3$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 3$ soluzione u crescente. Valutando la stima della sublinearità sulla soluzione, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a sinistra, per $y_0 < 3$ lo è anche a destra. Per $t \to -\infty$ la soluzione ammette $y = 3$ come asintoto orizzontale, se $y_0 \neq 3$, mentre se $y_0 < 3$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ (per il teorema dell'asintoto) e non ammette asintoto obliquo. Se $y_0 > 3$ soluzione u convessa; se $y_0 < 3$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = 2$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti.

8. Si applica il teorema di Green alla semicorona circolare D; calcolando $\iint_D -\frac{6}{7}y\,dxdy$, risulta -4

COMPITO 3

1. si applica il teorema della divergenza, div$\vec{F} = -\sin x + 8y^7 + 7(1-z)$ si ottiene $\frac{7\pi}{4}$.
2. 4
3. Si ha convergenza uniforme su $[-4,4]$ alla funzione $f \equiv 0$.
4. La serie converge puntualmente su $[0,+\infty[$ e totalmente su ogni intervallo del tipo $[0,M]$, con $M > 0$.
5. $a_0 = 6$, $a_1 = -3$. Basta osservare che $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ e quindi $f(x) = 3 - 3\cos x$ coincide con il proprio sviluppo di Fourier. Usando in questo caso banale l'uguaglianza di Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 27\pi$.
6. $y(t) = -\frac{6}{t} - \frac{7}{2t^2} + 6$.
7. $f(t,y) = (y-4)e^y$ è $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 4$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 4$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 4$ soluzione u crescente. Valutando la stima della sublinearità sulla soluzione, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a sinistra, per $y_0 < 4$ lo è anche a destra. Per $t \to -\infty$ la soluzione ammette $y = 4$ come asintoto orizzontale, se $y_0 \neq 4$, mentre se $y_0 < 4$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ (per il teorema dell'asintoto) e non ammette asintoto obliquo. Se $y_0 > 4$ soluzione u convessa; se $y_0 < 4$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = 3$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti.
8. Si applica il teorema di Green alla semicorona circolare D; calcolando $\iint_D -\frac{9}{7}y\,dxdy$, risulta -6

COMPITO 4

1. si applica il teorema della divergenza, div$\vec{F} = -\sin x + 10y^9 + 9(1-z)$ si ottiene $\frac{9\pi}{4}$.
2. 3
3. Si ha convergenza uniforme su $[-5,5]$ alla funzione $f \equiv 0$.
4. La serie converge puntualmente su $[0,+\infty[$ e totalmente su ogni intervallo del tipo $[0,M]$, con $M > 0$.
5. $a_0 = 8$, $a_1 = -4$. Basta osservare che $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ e quindi $f(x) = 4 - 4\cos x$ coincide con il proprio sviluppo di Fourier. Usando in questo caso banale l'uguaglianza di Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 48\pi$.
6. $y(t) = -\frac{8}{t} - \frac{9}{2t^2} + 8$.
7. $f(t,y) = (y-5)e^y$ è $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 5$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 5$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 5$ soluzione u crescente. Valutando la stima della sublinearità sulla soluzione, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a sinistra, per $y_0 < 5$ lo è anche a destra. Per $t \to -\infty$ la soluzione ammette $y = 5$ come asintoto orizzontale, se $y_0 \neq 5$, mentre se $y_0 < 5$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ (per il teorema dell'asintoto) e non ammette asintoto obliquo. Se $y_0 > 5$ soluzione u convessa; se $y_0 < 5$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = 4$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti.

8. Si applica il teorema di Green alla semicorona circolare D; calcolando $\iint_D -\frac{12}{7} y\, dxdy$, risulta -8

COMPITO 5

1. si applica il teorema della divergenza, $\mathrm{div}\vec{F} = -\sin x + 12y^{11} + 11(1-z)$ si ottiene $\frac{11\pi}{4}$.

2. 2

3. Si ha convergenza uniforme su $[-6, 6]$ alla funzione $f \equiv 0$.

4. La serie converge puntualmente su $[0, +\infty[$ e totalmente su ogni intervallo del tipo $[0, M]$, con $M > 0$.

5. $a_0 = 10$, $a_1 = -5$. Basta osservare che $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ e quindi $f(x) = 5 - 5\cos x$ coincide con il proprio sviluppo di Fourier. Usando in questo caso banale l'uguaglianza di Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 75\pi$.

6. $y(t) = -\frac{10}{t} - \frac{11}{2t^2} + 10$.

7. $f(t, y) = (y-6)e^y$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 6$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 6$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 6$ soluzione u crescente. Valutando la stima della sublinearità sulla soluzione, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a sinistra, per $y_0 < 6$ lo è anche a destra. Per $t \to -\infty$ la soluzione ammette $y = 6$ come asintoto orizzontale, se $y_0 \neq 6$, mentre se $y_0 < 6$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ (per il teorema dell'asintoto) e non ammette asintoto obliquo. Se $y_0 > 6$ soluzione u convessa; se $y_0 < 6$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = 5$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti.

8. Si applica il teorema di Green alla semicorona circolare D; calcolando $\iint_D -\frac{15}{7} y\, dxdy$, risulta -10

COMPITO 6

1. si applica il teorema della divergenza, $\mathrm{div}\vec{F} = -\sin x + 14y^{13} + 13(1-z)$ si ottiene $\frac{13\pi}{4}$.

2. 1

3. Si ha convergenza uniforme su $[-7, 7]$ alla funzione $f \equiv 0$.

4. La serie converge puntualmente su $[0, +\infty[$ e totalmente su ogni intervallo del tipo $[0, M]$, con $M > 0$.

5. $a_0 = 12$, $a_1 = -6$. Basta osservare che $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ e quindi $f(x) = 6 - 6\cos x$ coincide con il proprio sviluppo di Fourier. Usando in questo caso banale l'uguaglianza di Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 108\pi$.

6. $y(t) = -\frac{12}{t} - \frac{13}{2t^2} + 12$.

7. $f(t, y) = (y-7)e^y$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ quindi esistenza ed unicità locali; $u = 7$ soluzione stazionaria; se $y_0 < 7$ soluzione u decrescente; se $y_0 > 7$ soluzione u crescente. Valutando la stima della sublinearità sulla soluzione, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale è illimitato a sinistra, per $y_0 < 7$ lo è anche a destra. Per $t \to -\infty$ la soluzione ammette $y = 7$ come asintoto orizzontale, se $y_0 \neq 7$, mentre se $y_0 < 7$ $\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$ (per il teorema dell'asintoto) e non ammette asintoto obliquo. Se $y_0 > 7$ soluzione u convessa; se $y_0 < 7$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = 6$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti.

8. Si applica il teorema di Green alla semicorona circolare D; calcolando $\iint_D -\frac{18}{7}y\,dxdy$, risulta -12