COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA/ANALISI MATEMATICA C- 7 SETTEMBRE 2012.

Il numero del compito è dato dal coefficiente di e nell'esercizio 7.

COMPITO 1

1. $\frac{3}{2}\pi$
2. $\frac{\pi}{12}\left(3^{3/2}-1\right)$
3. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente a zero in $I=[-2,2]$.
4. raggio 1 indipendente da β; se $\beta>3/2$, la serie converge totalmente in $[6,8]$; se $0<\beta\le 3/2$, si ha convergenza uniforme in $[b,8]$, $\forall b$ con $6<b<8$ e convergenza totale in $[7-r,7+r]$ con $0<r<1$.
5. $a_0=7\pi$; $a_n=0$ se n è pari, $a_n=-\frac{28}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n=0$.
   $S(x)=\frac{7}{2}\pi-\frac{28}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)$.
6. f è C^1 a tratti in $\mathbb{R}$ quindi la sua serie di Fourier converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$. D'altra parte, dato che $|\frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)|\le\frac{1}{(2m+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall m\in\mathbb{N}$, la convergenza è totale. Si dimostra che la somma della serie numerica vale $\frac{\pi^2}{8}$ calcolando la serie di Fourier associata a f in $x=0$.
7. $f(t,y)=y+\frac{e^{4t}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; se $y_0>0$ soluzione u crescente; se $y_0<0$ soluzione u decrescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra poiché $|u(t)|>|y_0|$ $\forall t\in(0,T_{max})$ e $|f(t,u(t))|\le\frac{c}{|y_0|}+|u(t)|$ $\forall t\in(0,T_{max})$; la soluzione non ammette asintoti per $t\to+\infty$.
8. $y(t)=-e^{2t}$.

COMPITO 2

1. $\frac{5}{2}\pi$
2. $\frac{\pi}{18}\left(4^{3/2}-1\right)$
3. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente a zero in $I=[-3,3]$.
4. raggio 1 indipendente da β; se $\beta>5/2$, la serie converge totalmente in $[5,7]$; se $0<\beta\le 5/2$, si ha convergenza uniforme in $[b,7]$, $\forall b$ con $5<b<7$ e convergenza totale in $[6-r,6+r]$ con $0<r<1$.
5. $a_0=6\pi$; $a_n=0$ se n è pari, $a_n=-\frac{24}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n=0$.
   $S(x)=\frac{6}{2}\pi-\frac{24}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)$.
6. f è C^1 a tratti in $\mathbb{R}$ quindi la sua serie di Fourier converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$. D'altra parte, dato che $|\frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)|\le\frac{1}{(2m+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall m\in\mathbb{N}$, la convergenza è totale. Si dimostra che la somma della serie numerica vale $\frac{\pi^2}{8}$ calcolando la serie di Fourier associata a f in $x=0$.

7. $f(t,y) = y + \frac{2e^{6t}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra poiché $|u(t)| > |y_0|$ $\forall t \in (0, T_{max})$ e $|f(t, u(t))| \leq \frac{c}{|y_0|} + |u(t)|$ $\forall t \in (0, T_{max})$; la soluzione non ammette asintoti per $t \to +\infty$.

8. $y(t) = -e^{3t}$.

COMPITO 3

1. $\frac{7}{2}\pi$

2. $\frac{\pi}{24}\left(5^{3/2} - 1\right)$

3. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente a zero in $I = [-4, 4]$.

4. raggio 1 indipendente da β; se $\beta > 7/2$, la serie converge totalmente in $[4, 6]$; se $0 < \beta \leq 7/2$, si ha convergenza uniforme in $[b, 6]$, $\forall b$ con $4 < b < 6$ e convergenza totale in $[5 - r, 5 + r]$ con $0 < r < 1$.

5. $a_0 = 5\pi$; $a_n = 0$ se n è pari, $a_n = -\frac{20}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = 0$.
   $S(x) = \frac{5}{2}\pi - \frac{20}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos((2m+1)x)$.

6. f è C^1 a tratti in $\mathbb{R}$ quindi la sua serie di Fourier converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$. D'altra parte, dato che $|\frac{1}{(2m+1)^2} \cos((2m+1)x)| \leq \frac{1}{(2m+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, la convergenza è totale. Si dimostra che la somma della serie numerica vale $\frac{\pi^2}{8}$ calcolando la serie di Fourier associata a f in $x = 0$.

7. $f(t,y) = y + \frac{3e^{8t}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra poiché $|u(t)| > |y_0|$ $\forall t \in (0, T_{max})$ e $|f(t, u(t))| \leq \frac{c}{|y_0|} + |u(t)|$ $\forall t \in (0, T_{max})$; la soluzione non ammette asintoti per $t \to +\infty$.

8. $y(t) = -e^{4t}$.

COMPITO 4

1. $\frac{9}{2}\pi$

2. $\frac{\pi}{30}\left(6^{3/2} - 1\right)$

3. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente a zero in $I = [-5, 5]$.

4. raggio 1 indipendente da β; se $\beta > 9/2$, la serie converge totalmente in $[3, 5]$; se $0 < \beta \leq 9/2$, si ha convergenza uniforme in $[b, 5]$, $\forall b$ con $3 < b < 5$ e convergenza totale in $[4 - r, 4 + r]$ con $0 < r < 1$.

5. $a_0 = 4\pi$; $a_n = 0$ se n è pari, $a_n = -\frac{16}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = 0$.

$S(x) = \frac{4}{2}\pi - \frac{16}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)$.

6. f è C^1 a tratti in $\mathbb{R}$ quindi la sua serie di Fourier converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$. D'altra parte, dato che $|\frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)| \le \frac{1}{(2m+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, la convergenza è totale. Si dimostra che la somma della serie numerica vale $\frac{\pi^2}{8}$ calcolando la serie di Fourier associata a f in $x = 0$.
7. $f(t,y) = y + \frac{4e^{10t}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra poiché $|u(t)| > |y_0|$ $\forall t \in (0, T_{max})$ e $|f(t,u(t))| \le \frac{c}{|y_0|} + |u(t)|$ $\forall t \in (0, T_{max})$; la soluzione non ammette asintoti per $t \to +\infty$.
8. $y(t) = -e^{5t}$.

COMPITO 5

1. $\frac{11}{2}\pi$
2. $\frac{\pi}{36}\left(7^{3/2} - 1\right)$
3. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente a zero in $I = [-6, 6]$.
4. raggio 1 indipendente da β; se $\beta > 11/2$, la serie converge totalmente in $[2, 4]$; se $0 < \beta \le 11/2$, si ha convergenza uniforme in $[b, 4]$, $\forall b$ con $2 < b < 4$ e convergenza totale in $[3 - r, 3 + r]$ con $0 < r < 1$.
5. $a_0 = 3\pi$; $a_n = 0$ se n è pari, $a_n = -\frac{12}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = 0$.
   $S(x) = \frac{3}{2}\pi - \frac{12}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)$.
6. f è C^1 a tratti in $\mathbb{R}$ quindi la sua serie di Fourier converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$. D'altra parte, dato che $|\frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)| \le \frac{1}{(2m+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, la convergenza è totale. Si dimostra che la somma della serie numerica vale $\frac{\pi^2}{8}$ calcolando la serie di Fourier associata a f in $x = 0$.
7. $f(t,y) = y + \frac{5e^{12t}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra poiché $|u(t)| > |y_0|$ $\forall t \in (0, T_{max})$ e $|f(t,u(t))| \le \frac{c}{|y_0|} + |u(t)|$ $\forall t \in (0, T_{max})$; la soluzione non ammette asintoti per $t \to +\infty$.
8. $y(t) = -e^{6t}$.

COMPITO 6

1. $\frac{13}{2}\pi$
2. $\frac{\pi}{42}\left(8^{3/2} - 1\right)$
3. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente a zero in $I = [-7, 7]$.
4. raggio 1 indipendente da β; se $\beta > 13/2$, la serie converge totalmente in $[1, 3]$; se $0 < \beta \le 13/2$, si ha convergenza uniforme in $[b, 3]$, $\forall b$ con $1 < b < 3$ e convergenza totale in $[2 - r, 2 + r]$ con $0 < r < 1$.
5. $a_0 = 2\pi$; $a_n = 0$ se n è pari, $a_n = -\frac{8}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = 0$.

$S(x) = \frac{2}{2}\pi - \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)$.

6. f è C^1 a tratti in $\mathbb{R}$ quindi la sua serie di Fourier converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$. D'altra parte, dato che $|\frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)| \le \frac{1}{(2m+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, la convergenza è totale. Si dimostra che la somma della serie numerica vale $\frac{\pi^2}{8}$ calcolando la serie di Fourier associata a f in $x = 0$.

7. $f(t, y) = y + \frac{6e^{14t}}{y}$ è $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$ quindi esistenza ed unicità locali; se $y_0 > 0$ soluzione u crescente; se $y_0 < 0$ soluzione u decrescente; l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra poiché $|u(t)| > |y_0|$ $\forall t \in (0, T_{max})$ e $|f(t, u(t))| \le \frac{c}{|y_0|} + |u(t)|$ $\forall t \in (0, T_{max})$; la soluzione non ammette asintoti per $t \to +\infty$.

8. $y(t) = -e^{7t}$.