COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA/ANALISI MATEMATICA C- 8 settembre 2011.

Il numero del compito è dato dall'intero sottratto ad α nell'esercizio 4.

COMPITO 1

1. 21π

2. 4

3. converge puntualmente a $f(x) = 0$ se $7\pi < x < 21\pi$, $f(7\pi) = 1$, diverge se $0 \le x < 7\pi$, oscilla se $21\pi \le x \le 28\pi$. C'è convergenza uniforme solo nei sottoinsiemi del tipo $[a, b]$ con $[a, b] \subset]7\pi, 21\pi[$.

4. Considerando l'approssimazione $\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n} = \frac{x^3}{6n^3} + o(\frac{1}{n^4})$, per $\alpha < 3$ converge puntualmente in $]0, +\infty[$ e totalmente sui limitati.

5. $a_0 = 3$, $a_1 = \frac{4}{\pi}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{4}{3\pi}$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(4\pi) = 0$, $S(\frac{5}{2}\pi) = \frac{7}{2}$, $S(-\frac{\pi}{2}) = \frac{5}{2}$.

7. $\frac{y+2}{2\log(y+2)}$ è C^1 se $y \in]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$, quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie. Se $y_0 > -1$ soluzione u crescente; $-2 < y_0 < -1$ soluzione u decrescente. Se $-2 < y_0 < -1$ soluzione u convessa; se $y_0 > -1$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = e - 2$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti. Non ci sono motivi affinché l'intervallo massimale non possa essere illimitato a destra per $y_0 \in]-1, +\infty[$.

8. La soluzione del primo problema è $u(t) = -2 + e^{\sqrt{t+\log^2 2}}$ definita in $[-\log^2 2, +\infty[$, quindi l'intervallo massimale è illimitato a destra (d'altra parte il secondo membro era sublineare...), mentre non lo è a sinistra (dove incontra uno degli estremi dell'insieme di definizione del secondo membro). Analogamente per il secondo problema dove $u(t) = -2 + e^{-\sqrt{t+\log^2 2}}$.

COMPITO 2

1. 18π

2. 9

3. converge puntualmente a $f(x) = 0$ se $6\pi < x < 18\pi$, $f(6\pi) = 1$, diverge se $0 \le x < 6\pi$, oscilla se $18\pi \le x \le 24\pi$. C'è convergenza uniforme solo nei sottoinsiemi del tipo $[a, b]$ con $[a, b] \subset]6\pi, 18\pi[$.

4. Considerando l'approssimazione $\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n} = \frac{x^3}{6n^3} + o(\frac{1}{n^4})$, per $\alpha < 4$ converge puntualmente in $]0, +\infty[$ e totalmente sui limitati.

5. $a_0 = 6$, $a_1 = \frac{8}{\pi}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{4}{3\pi}$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(8\pi) = 0$, $S(\frac{9}{2}\pi) = \frac{13}{2}$, $S(-\frac{\pi}{2}) = \frac{11}{2}$.

7. $\frac{y+3}{2\log(y+3)}$ è C^1 se $y \in]-3, -2[\cup]-2, +\infty[$, quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie. Se $y_0 > -2$ soluzione u crescente; $-3 < y_0 < -2$ soluzione u decrescente. Se $-3 < y_0 < -2$ soluzione u convessa; se $y_0 > -2$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = e - 3$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti. Non ci sono motivi affinché l'intervallo massimale non possa essere illimitato a destra per $y_0 \in]-2, +\infty[$.

8. La soluzione del primo problema è $u(t) = -3 + e^{\sqrt{t+\log^2 3}}$ definita in $[-\log^2 3, +\infty[$, quindi l'intervallo massimale è illimitato a destra (d'altra parte il secondo membro era sublineare...), mentre non lo è a sinistra (dove incontra uno degli estremi dell'insieme di definizione del secondo membro). Analogamente per il secondo problema dove $u(t) = -3 + e^{-\sqrt{t+\log^2 2}}$.

COMPITO 3

1. 15π

2. 16

3. converge puntualmente a $f(x) = 0$ se $5\pi < x < 15\pi$, $f(5\pi) = 1$, diverge se $0 \leq x < 5\pi$, oscilla se $15\pi \leq x \leq 20\pi$. C'è convergenza uniforme solo nei sottoinsiemi del tipo $[a, b]$ con $[a, b] \subset]5\pi, 15\pi[$.

4. Considerando l'approssimazione $\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n} = \frac{x^3}{6n^3} + o(\frac{1}{n^4})$, per $\alpha < 5$ converge puntualmente in $]0, +\infty[$ e totalmente sui limitati.

5. $a_0 = 9$, $a_1 = \frac{12}{\pi}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{4}{3\pi}$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(12\pi) = 0$, $S(\frac{13}{2}\pi) = \frac{19}{2}$, $S(-\frac{\pi}{2}) = \frac{17}{2}$.

7. $\frac{y+4}{2\log(y+4)}$ è C^1 se $y \in]-4, -3[\cup]-3, +\infty[$, quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie. Se $y_0 > -3$ soluzione u crescente; $-4 < y_0 < -3$ soluzione u decrescente. Se $-4 < y_0 < -3$ soluzione u convessa; se $y_0 > -3$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = e - 4$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti. Non ci sono motivi affinché l'intervallo massimale non possa essere illimitato a destra per $y_0 \in]-3, +\infty[$.

8. La soluzione del primo problema è $u(t) = -4 + e^{\sqrt{t+\log^2 4}}$ definita in $[-\log^2 4, +\infty[$, quindi l'intervallo massimale è illimitato a destra (d'altra parte il secondo membro era sublineare...), mentre non lo è a sinistra (dove incontra uno degli estremi dell'insieme di definizione del secondo membro). Analogamente per il secondo problema dove $u(t) = -4 + e^{-\sqrt{t+\log^2 2}}$.

COMPITO 4

1. 12π

2. 25

3. converge puntualmente a $f(x) = 0$ se $4\pi < x < 12\pi$, $f(4\pi) = 1$, diverge se $0 \leq x < 4\pi$, oscilla se $12\pi \leq x \leq 16\pi$. C'è convergenza uniforme solo nei sottoinsiemi del tipo $[a, b]$ con $[a, b] \subset]4\pi, 12\pi[$.

4. Considerando l'approssimazione $\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n} = \frac{x^3}{6n^3} + o(\frac{1}{n^4})$, per $\alpha < 6$ converge puntualmente in $]0, +\infty[$ e totalmente sui limitati.

5. $a_0 = 12$, $a_1 = \frac{16}{\pi}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{4}{3\pi}$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(16\pi) = 0$, $S(\frac{17}{2}\pi) = \frac{25}{2}$, $S(-\frac{\pi}{2}) = \frac{23}{2}$.

7. $\frac{y+5}{2\log(y+5)}$ è C^1 se $y \in]-5,-4[\cup]-4,+\infty[$, quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie. Se $y_0 > -4$ soluzione u crescente; $-5 < y_0 < -4$ soluzione u decrescente. Se $-5 < y_0 < -4$ soluzione u convessa; se $y_0 > -4$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = e-5$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti. Non ci sono motivi affinché l'intervallo massimale non possa essere illimitato a destra per $y_0 \in]-4,+\infty[$.

8. La soluzione del primo problema è $u(t) = -5 + e^{\sqrt{t+\log^2 5}}$ definita in $[-\log^2 5, +\infty[$, quindi l'intervallo massimale è illimitato a destra (d'altra parte il secondo membro era sublineare...), mentre non lo è a sinistra (dove incontra uno degli estremi dell'insieme di definizione del secondo membro). Analogamente per il secondo problema dove $u(t) = -5 + e^{-\sqrt{t+\log^2 2}}$.

COMPITO 5

1. 9π

2. 36

3. converge puntualmente a $f(x) = 0$ se $3\pi < x < 9\pi$, $f(3\pi) = 1$, diverge se $0 \leq x < 3\pi$, oscilla se $9\pi \leq x \leq 12\pi$. C'è convergenza uniforme solo nei sottoinsiemi del tipo $[a,b]$ con $[a,b] \subset]3\pi, 9\pi[$.

4. Considerando l'approssimazione $\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n} = \frac{x^3}{6n^3} + o(\frac{1}{n^4})$, per $\alpha < 7$ converge puntualmente in $]0,+\infty[$ e totalmente sui limitati.

5. $a_0 = 15$, $a_1 = \frac{20}{\pi}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{4}{3\pi}$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(20\pi) = 0$, $S(\frac{21}{2}\pi) = \frac{31}{2}$, $S(-\frac{\pi}{2}) = \frac{29}{2}$.

7. $\frac{y+6}{2\log(y+6)}$ è C^1 se $y \in]-6,-5[\cup]-5,+\infty[$, quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie. Se $y_0 > -5$ soluzione u crescente; $-6 < y_0 < -5$ soluzione u decrescente. Se $-6 < y_0 < -5$ soluzione u convessa; se $y_0 > -5$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = e-6$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti. Non ci sono motivi affinché l'intervallo massimale non possa essere illimitato a destra per $y_0 \in]-5,+\infty[$.

8. La soluzione del primo problema è $u(t) = -6 + e^{\sqrt{t+\log^2 6}}$ definita in $[-\log^2 6, +\infty[$, quindi l'intervallo massimale è illimitato a destra (d'altra parte il secondo membro era sublineare...), mentre non lo è a sinistra (dove incontra uno degli estremi dell'insieme di definizione del secondo membro). Analogamente per il secondo problema dove $u(t) = -6 + e^{-\sqrt{t+\log^2 2}}$.

COMPITO 6

1. 6π

2. 49

3. converge puntualmente a $f(x) = 0$ se $2\pi < x < 6\pi$, $f(2\pi) = 1$, diverge se $0 \leq x < 2\pi$, oscilla se $6\pi \leq x \leq 8\pi$. C'è convergenza uniforme solo nei sottoinsiemi del tipo $[a,b]$ con $[a,b] \subset]2\pi, 6\pi[$.

4. Considerando l'approssimazione $\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n} = \frac{x^3}{6n^3} + o(\frac{1}{n^4})$, per $\alpha < 8$ converge puntualmente in $]0,+\infty[$ e totalmente sui limitati.

5. $a_0 = 18$, $a_1 = \frac{24}{\pi}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{4}{3\pi}$.

6. Non converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ perché è discontinua; converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ perché è continua a tratti. $S(24\pi) = 0$, $S(\frac{25}{2}\pi) = \frac{37}{2}$, $S(-\frac{\pi}{2}) = \frac{35}{2}$.

7. $\frac{y+7}{2\log(y+7)}$ è C^1 se $y \in]-7,-6[\cup]-6,+\infty[$, quindi esistenza ed unicità locali; non ci sono soluzioni stazionarie. Se $y_0 > -6$ soluzione u crescente; $-7 < y_0 < -6$ soluzione u decrescente. Se $-7 < y_0 < -6$ soluzione u convessa; se $y_0 > -6$ esiste un punto $\bar{t}$ (di flesso) con $u(\bar{t}) = e - 7$ e u convessa per $t > \bar{t}$ e concava altrimenti. Non ci sono motivi affinché l'intervallo massimale non possa essere illimitato a destra per $y_0 \in]-6,+\infty[$.

8. La soluzione del primo problema è $u(t) = -7 + e^{\sqrt{t+\log^2 7}}$ definita in $[-\log^2 7, +\infty[$, quindi l'intervallo massimale è illimitato a destra (d'altra parte il secondo membro era sublineare...), mentre non lo è a sinistra (dove incontra uno degli estremi dell'insieme di definizione del secondo membro). Analogamente per il secondo problema dove $u(t) = -7 + e^{-\sqrt{t+\log^2 2}}$.
