Analisi Matematica I — 16 gennaio 2018 — FOGLIO A

Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Corso di Laurea: $\diamondsuit$ AUTLT, $\diamondsuit$ MECMLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.
5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\log|x| - 2x) & \text{se } x \neq 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
   Risposta [punti 1]:

   Discutere la continuità di f nel suo dominio.
   Risposta [punti 1]:

   Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.
   Risposta [punti 1]:

   Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
   Risposta [punti 2.5]:

   Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.
   Risposta [punti 1.5]:

   Senza calcolare la derivata seconda di f, discutere la possibile esistenza di punti di flesso.
   Risposta [punti 1]:

   Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.
   Risposta [punti 1]:

---

2. Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $$Re\left(\frac{|z|-2i}{i|z|+1}\right)+\frac{1}{2}=0$$

Risposta [punti 3]:

---

3. Calcolare il limite $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[e^{2n}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\left[(n+1)!-n!\right]}{(n!-7^n)\left[\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\sin\frac{4}{n}\right]\sqrt{n^8e^{4n}+\sin\left(\frac{n}{7}\right)}}$$

Risposta [punti 3]:

---

4. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left[7\alpha-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\left(e^{1/n^2}-1\right)(n+1)^3}$$

Risposta [punti 3]:

---

5. Calcolare il limite $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\arctan(x)}{\left(e^{x/4}-1+\sinh(x^{10})\right)\left(\frac{1}{x}\log\left(1+x^3\right)+\cos(x)-1\right)}$$

Risposta [punti 3]:

---

6. Discutere la continuità di $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(e^{x-7}-1)}{(x-7)^{\alpha-1}} & \text{se } x>7 \\ 1 & \text{se } x=7 \\ (7-x)\sin\left(\frac{1}{7-x}\right) & \text{se } x<7 \end{cases}$$
nel punto $x=7$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta [punti 3]:

---

7. Calcolare l'integrale $$\int_0^{\sqrt[3]{5}} x^{1/2}\arctan x^{3/2}\,dx\,.$$

Risposta [punti 3]:

---

8. Determinare la soluzione $y=y(x)$ del problema di Cauchy $$\begin{cases} y''-y'-2y=xe^x \\ y(0)=-\frac{1}{4}, \quad y'(0)=3 \end{cases}$$

Risposta [punti 3]:

---

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\log|x| - 2x) & \text{se } x \neq 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
Risposta [punti 1]:

Discutere la continuità di f nel suo dominio.
Risposta [punti 1]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.
Risposta [punti 1]:

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
Risposta [punti 2.5]:

Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.
Risposta [punti 1.5]:

Senza calcolare la derivata seconda di f, discutere la possibile esistenza di punti di flesso.
Risposta [punti 1]:

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.
Risposta [punti 1]:

---

2. Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $\quad Re\left(\frac{|z| - 2i}{i|z| + 1}\right) + \frac{1}{2} = 0$

Risposta [punti 3]:

---

3. Calcolare il limite $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\left[e^{2n} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] [(n+1)! - n!]}{(n! - 7^n)\left[\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{4}\sin\frac{4}{n}\right]\sqrt{n^8 e^{4n} + \sin\left(\frac{n}{7}\right)}}$

Risposta [punti 3]:

---

4. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left[7\alpha - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\left(e^{1/n^2} - 1\right)(n+1)^3}$

Risposta [punti 3]:

---

5. Calcolare il limite $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \arctan(x)}{\left(e^{x/4} - 1 + \sinh(x^{10})\right)\left(\frac{1}{x}\log\left(1 + x^3\right) + \cos(x) - 1\right)}$

Risposta [punti 3]:

---

6. Discutere la continuità di $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^{x-7} - 1)}{(x-7)^{\alpha - 1}} & \text{se } x > 7 \\ 1 & \text{se } x = 7 \\ (7 - x)\sin\left(\frac{1}{7-x}\right) & \text{se } x < 7 \end{cases}$

nel punto $x = 7$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta [punti 3]:

---

7. Calcolare l'integrale $\quad \int_0^{\sqrt[3]{5}} x^{1/2} \arctan x^{3/2}\, dx\,.$

Risposta [punti 3]:

---

8. Determinare la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y' - 2y = xe^x \\ y(0) = -\frac{1}{4}, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$

Risposta [punti 3]:
