
Cognome e nome Firma

Corso di Laurea: ◇ GESL ◇ INFL;

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare e segnare il proprio corso di laurea.**
 2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
 3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
 5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo.**
 6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
 7. TEMPO a disposizione: 150 min.
-

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{1}{2} \log^2 x - (\log^2 3) \log(|\log x|)$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione f , in accordo con i risultati ottenuti, sui fogli di protocollo.

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Risposta [punti 1]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

Risposta [punti 3]:

Calcolare la funzione derivata prima di f classificando eventuali punti di non derivabilità.

Risposta [punti 1]:

Studiare la crescita e decrescita di f , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f .

Risposta [punti 2]:

Senza calcolare la derivata seconda di f , dire se f ammette almeno un punto di flesso e rappresentarlo graficamente.

Risposta [punti 1]:

2. Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$[|z - 3i|^2 + \operatorname{Re}(z + 6\bar{z})\operatorname{Im}(z - \bar{z})i - (7i + 1)z\bar{z}] \in \mathbb{R}$$

Risposta [punti 3]:

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n + 7n \log n + n \sin n}{(n+2)^n + n \log \frac{1}{n} + n \sin \frac{1}{n}}$$

Risposta [punti 3]:

4. Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$$

Risposta [punti 3]:

5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin(x-1) + (x-1)^2}{2(e^{x-1} - 1)} & \text{se } x \neq 1, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = 1$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile in $x = 1$.

Risposta [punti 5]:

6. Calcolare l'integrale improprio seguente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx$$

Risposta [punti 4]:

7. Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 49y = \cos x, \\ y(0) = \frac{1}{48}, \quad y'(0) = 7. \end{cases}$$

Risposta [punti 4]:

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{1}{2} \log^2 x - (\log^2 3) \log(|\log x|)$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione f , in accordo con i risultati ottenuti, sui fogli di protocollo.

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Risposta [punti 1]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

Risposta [punti 3]:

Calcolare la funzione derivata prima di f classificando eventuali punti di non derivabilità.

Risposta [punti 1]:

Studiare la crescita e decrescita di f , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f .

Risposta [punti 2]:

Senza calcolare la derivata seconda di f , dire se f ammette almeno un punto di flesso e rappresentarlo graficamente.

Risposta [punti 1]:

2. Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left[|z - 3i|^2 + \operatorname{Re}(z + 6\bar{z})\operatorname{Im}(z - \bar{z})i - (7i + 1)z\bar{z} \right] \in \mathbb{R}$$

Risposta [punti 3]:

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n + 7n \log n + n \sin n}{(n+2)^n + n \log \frac{1}{n} + n \sin \frac{1}{n}}$$

Risposta [punti 3]:

4. Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$$

Risposta [punti 3]:

5. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin(x-1) + (x-1)^2}{2(e^{x-1} - 1)} & \text{se } x \neq 1, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = 1$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile in $x = 1$.

Risposta [punti 5]:

6. Calcolare l'integrale improprio seguente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx$$

Risposta [punti 4]:

7. Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 49y = \cos x, \\ y(0) = \frac{1}{48}, \quad y'(0) = 7. \end{cases}$$

Risposta [punti 4]:
