
Cognome Nome

Matricola Firma

Corso di Laurea: \diamond AUTLT, \diamond MECMLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare e segnare il proprio corso di laurea.**
 2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
 3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.
 5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo.**
 6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
 7. TEMPO a disposizione: 150 min.
-

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right).$$

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Risposta [punti 0,5]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

Risposta [punti 2,5]:

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Risposta [punti 1,5]:

Studiare la crescita e decrescita di f , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f .

Risposta [punti 1,5]:

Senza calcolare la derivata seconda di f discutere la possibile esistenza di punti di flesso.

Risposta [punti 1]:

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f , in accordo con i risultati ottenuti.

Risposta [punti 1]:

2. Determinare il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $Re(|z|^2 - 2i\bar{z}) + (z - i)^2 = 3$.

Risposta [punti 3]:

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\log(n+1)^n + \sin(n!)] \left[\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right]}{(n + e^{-n})^2 \left[\sqrt{n^{2\alpha} + 7} - n^\alpha \right]}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Risposta [punti 3]:

4. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{7n^2 + \sqrt{n}}{[\alpha^n + 7^n]^n}$.

Risposta [punti 3]:

5. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2 \log(1+1/x)} - e^x - 2x}{3e^x - x^3}.$$

Risposta [punti 3]:

6. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} [\log(e^x - 2)]^{\alpha-1} & \text{se } x > \log 3 \\ 0 & \text{se } x = \log 3 \\ [\log 3 - x]^{\alpha-1} & \text{se } x < \log 3. \end{cases}$$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la continuità di f nel punto $x = \log 3$; discutere la derivabilità di f nel punto $x = \log 3$ e classificare il tipo di non derivabilità.

Risposta [punti 4]:

7. Sia $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la primitiva di $f(x) = \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{7x}{1+x^2}\right)$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Risposta [punti 3]:

8. Calcolare la soluzione \tilde{y} del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = 4e^{2x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = \frac{8}{7}. \end{cases}$$

Risposta [punti 3]:

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right).$$

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Risposta [punti 0,5]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

Risposta [punti 2,5]:

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Risposta [punti 1,5]:

Studiare la crescita e decrescita di f , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f .

Risposta [punti 1,5]:

Senza calcolare la derivata seconda di f discutere la possibile esistenza di punti di flesso.

Risposta [punti 1]:

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f , in accordo con i risultati ottenuti.

Risposta [punti 1]:

2. Determinare il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re}(|z|^2 - 2i\bar{z}) + (z - i)^2 = 3$.

Risposta [punti 3]:

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\log(n+1)^n + \sin(n!)] \left[\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right]}{(n + e^{-n})^2 \left[\sqrt{n^2\alpha + 7} - n^\alpha \right]}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Risposta [punti 3]:

4. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{7n^2 + \sqrt{n}}{[\alpha^n + 7^n]^n}$.

Risposta [punti 3]:

5. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} \log(1+1/x) - e^x - 2x}{3e^x - x^3}.$$

Risposta [punti 3]:

6. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} [\log(e^x - 2)]^{\alpha-1} & \text{se } x > \log 3 \\ 0 & \text{se } x = \log 3 \\ [\log 3 - x]^{\alpha-1} & \text{se } x < \log 3. \end{cases}$$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la continuità di f nel punto $x = \log 3$; discutere la derivabilità di f nel punto $x = \log 3$ e classificare il tipo di non derivabilità.

Risposta [punti 4]:

7. Sia $F: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la primitiva di $f(x) = \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{7x}{1+x^2}\right)$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Risposta [punti 3]:

8. Calcolare la soluzione \tilde{y} del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = 4e^{2x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = \frac{8}{7}. \end{cases}$$

Risposta [punti 3]: