Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT, ♢ MECMLT

Istruzioni

1. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.
2. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
3. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
4. TEMPO a disposizione: 150 min.

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \sqrt{(e^{(x-1)} - 1)^2 + (x-1)^2}$$

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
Risposta [punti 1]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.
Risposta [punti 3]:

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
Risposta [punti 2.5]:

Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f. [**Suggerimento**: la funzione $g(t) = (e^t - 1)e^t + t$ si annulla solo in $t = 0$, è positiva per $t > 0$ e negativa per $t < 0$.]
Risposta [punti 1.5]:

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.
Risposta [punti 1]:

2. Calcolare le radici terze complesse del numero $w = \left(\dfrac{7+i}{1-i7}\right)^{22}$

Risposta [punti 3]:

3. Calcolare il limite $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+n!}-\sqrt{n!}\right)\sqrt{n!+7^n}}{n^3[\log(n^3+2)-\log(n^3+1)]}$

Risposta [punti 3]:

---

4. Calcolare il limite $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{x/2}+\log\left(\sqrt{1+\frac{\sin(x^2)}{x}}\right)}{\sin(3x)\,\arctan\left(\frac{x}{3}\right)}$

Risposta [punti 3]:

---

5. Sia $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases} (2x-\pi)\left[\dfrac{1}{\cos(x)}+\cos\left(\dfrac{1}{2x-\pi}\right)\right] & \text{se } x\neq\dfrac{\pi}{2},\ x\neq\dfrac{3}{2}\pi \\ -2 & \text{se } x=\dfrac{\pi}{2} \text{ o } x=\dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Discutere la continuità di f nei punti $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{3}{2}\pi$ e classificare eventuali discontinuità.

Risposta [punti 3]:

---

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{8+\cos^2(x)}dx$

Risposta [punti 3]:

---

7. Discutere, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, il carattere dell'integrale improprio $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{x-\sin(x)}{x^{3\alpha}}dx$

Risposta [punti 3]:

---

8. Determinare la soluzione $y=y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'+2\sin(x)y=3e^{\cos(x)}\log(x) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$$

Risposta [punti 3]:

---

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \sqrt{(e^{(x-1)} - 1)^2 + (x-1)^2}$$

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
Risposta [punti 1]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.
Risposta [punti 3]:

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
Risposta [punti 2.5]:

Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f. [**Suggerimento**: la funzione
$g(t) = (e^t - 1)e^t + t$ si annulla solo in $t = 0$, è positiva per $t > 0$ e negativa per $t < 0$.]
Risposta [punti 1.5]:

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.
Risposta [punti 1]:

---

2. Calcolare le radici terze complesse del numero $w = \left(\dfrac{7+i}{1-i7}\right)^{22}$

Risposta [punti 3]:

---

3. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+n!} - \sqrt{n!}\right)\sqrt{n! + 7^n}}{n^3[\log(n^3+2) - \log(n^3+1)]}$

Risposta [punti 3]:

---

4. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{x/2} + \log\left(\sqrt{1 + \frac{\sin(x^2)}{x}}\right)}{\sin(3x)\ \arctan\left(\frac{x}{3}\right)}$

Risposta [punti 3]:

---

5. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (2x-\pi)\left[\dfrac{1}{\cos(x)} + \cos\left(\dfrac{1}{2x-\pi}\right)\right] & \text{se } x \neq \dfrac{\pi}{2},\ x \neq \dfrac{3}{2}\pi \\ -2 & \text{se } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ o } x = \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Discutere la continuità di f nei punti $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ e classificare eventuali discontinuità.

Risposta [punti 3]:

---

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{8 + \cos^2(x)}\,dx$

Risposta [punti 3]:

---

7. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^{3\alpha}}\,dx$

Risposta [punti 3]:

---

8. Determinare la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y' + 2\sin(x)y = 3e^{\cos(x)}\log(x) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Risposta [punti 3]:
