
Cognome e nome Firma

Corso di Laurea: ◇ GESL ◇ INFL;

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare e segnare il proprio corso di laurea.**
 2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
 3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
 5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo.**
 6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
 7. TEMPO a disposizione: 150 min.
-

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\log x + 2}\right)$$

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f , in accordo con i risultati ottenuti.

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Risposta [punti 1]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

Risposta [punti 2]:

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Risposta [punti 1]:

Studiare la crescita e decrescita di f , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f : stabilire se f è limitata inferiormente/superiormente.

Risposta [punti 2]:

Calcolare la funzione derivata seconda di f e studiare la concavità e la convessità di f , calcolando gli eventuali punti di flesso per f .

Risposta [punti 2]:

2. Calcolare le radici complesse della seguente equazione $z^4 - i|i - 1|^2 z = 0$.

Risposta [punti 3]:

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right) \left[n - \sqrt{n^2 + 7} \right]}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Risposta [punti 3]:

4. Stabilire il carattere del seguente integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin(\log(\log x))}{x \log x} dx$$

Risposta [punti 4]:

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; sia $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos x|} & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}, \\ 3 & \text{se } x = \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Si discuta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità di f in $(0, 2\pi)$.

Risposta [punti 4]:

6. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]^{\frac{2}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}} \log \left[3 \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \right]$$

Risposta [punti 4]:

7. Determinare la soluzione $y : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = e^{\arcsin x} \sin 7x, \\ y(0) = -\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Risposta [punti 4]:

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\log x + 2}\right)$$

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f , in accordo con i risultati ottenuti.

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Risposta [punti 1]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

Risposta [punti 2]:

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Risposta [punti 1]:

Studiare la crescita e decrescita di f , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f : stabilire se f è limitata inferiormente/superiormente.

Risposta [punti 2]:

Calcolare la funzione derivata seconda di f e studiare la concavità e la convessità di f , calcolando gli eventuali punti di flesso per f .

Risposta [punti 2]:

2. Calcolare le radici complesse della seguente equazione $z^4 - i|i - 1|^2 z = 0$.

Risposta [punti 3]:

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right) \left[n - \sqrt{n^2 + 7}\right]}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Risposta [punti 3]:

4. Stabilire il carattere del seguente integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin(\log(\log x))}{x \log x} dx$$

Risposta [punti 4]:

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; sia $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos x|} & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}, \\ 3 & \text{se } x = \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Si discuta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità di f in $(0, 2\pi)$.

Risposta [punti 4]:

6. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]^{\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} \log \left[3 \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \right]$$

Risposta [punti 4]:

7. Determinare la soluzione $y : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = e^{\arcsin x} \sin 7x, \\ y(0) = -\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Risposta [punti 4]:
