
Cognome e nome Firma

Matricola Corso di Laurea: \diamond INFLT, \diamond ETELT, \diamond AUTLT, \diamond MECMLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare e segnare il proprio corso di laurea.**
 2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
 3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.
 5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo.**
 6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
 7. TEMPO a disposizione: 150 min.
-

1. Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{|3-x|}{3-x} \left(\frac{1}{\log(x-1)} + 3-x \right).$$

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie

Risposta [punti 1.5]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

Risposta [punti 2.5]:

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Risposta [punti 1.5]:

Studiare la crescita e decrescita di f , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f .

Risposta [punti 1.5]:

Calcolare la derivata seconda di f , studiare concavità e convessità e determinare i punti di flesso.

Risposta [punti 2]:

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f , in accordo con i risultati ottenuti.

Risposta [punti 1]:

2. Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |z + 2|^2 + \operatorname{Re}((z - i)^2) = 3 \\ \operatorname{Im}(z) \geq 0. \end{cases}$$

Risposta [punti 3]:

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} n^{1/n} + \frac{\sin(n!)}{n} \right) \frac{\sqrt{1 + 8n^2} - n}{\log(1 + e^{n+2}) - \frac{n}{2}}.$$

Risposta [punti 4]:

4. Sia $\alpha \geq -1$. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)! + e^n}{(n! + n^2)(n^{\alpha+1} + \arctan \frac{1}{n})}$$

al variare di $\alpha \geq -1$.

Risposta [punti 3]:

5. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sin x)^{7/x} (\sin x - \frac{1}{2} \sin(2x))}{x^2 \tan x + e^{-1/x}}.$$

Risposta [punti 3]:

6. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + \sqrt{x}}}.$$

Risposta [punti 3]:

7. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\tilde{y} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(\frac{\alpha}{x} - \frac{2x}{1+x^2} \right) y \\ y(1) = 3/2. \end{cases}$$

Determinare la soluzione $\tilde{y}(x)$ e calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{y}(x)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta [punti 4]:
