Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◊ MECLT ◊ MATLT ◊ AUTLT ◊ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{7y\sin x}{x+y^2} & \text{se } x+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x+y^2 = 0. \end{cases}$$
Calcolare, se esistono, le derivate direzionali di f in $(0,0)$. Dimostrare che f non è differenziabile in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = e^{x^2y+xy^2-6xy}+1$ nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0 \, , y \geq 0 \, , x+y \leq 6\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

---

3. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ definito da
$$\vec{F}(x,y) = \left[\alpha^2 x^7 y^2 + 2xy^8\right] \vec{i} + \left[8y^{\alpha^2-1}x^2 + 2yx^8\right] \vec{j}\,.$$
Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale è conservativo nel suo dominio e calcolarne un potenziale.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale di superficie $\int\int_S z(1+2\cos^2(y-x))^{-1/2}\,dS$ dove $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sin(y-x)\,, 0\le x\le\pi\,, x\le y\le x+7\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $[0,+\infty[$:

$$f_n(x)=\frac{7x^n}{7+x^n}.$$

Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$. Si discuta la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $[0,+\infty[$ e/o in suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y'=t(e^y-2)$, $y(0)=y_0$. Discutere, al variare di $y_0\in\mathbb{R}$, l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale. Determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari) e le soluzioni stazionarie. Studiare, al variare di $y_0\in\mathbb{R}$, la monotonia. Dal comportamento qualitativo delle soluzioni discutere, al variare di $y_0\in\mathbb{R}$, se l'intervallo massimale di esistenza può essere tutto $\mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y''-\dfrac{y'}{t}=\dfrac{8t}{t^2+1}\,, y(1)=2(\pi-2)\,, y'(1)=2\pi\,.$ (Suggerimento: porre $z(t)=y'(t)\ldots$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x)=e^{-2|x|}$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$. Si calcoli $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2+b_n^2]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{7y\sin x}{x+y^2} & \text{se } x+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x+y^2 = 0. \end{cases}$$
Calcolare, se esistono, le derivate direzionali di f in $(0,0)$. Dimostrare che f non è differenziabile in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = e^{x^2y+xy^2-6xy}+1$ nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0\ , y \geq 0\ , x+y \leq 6\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

---

3. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ definito da
$$\vec{F}(x,y) = \left[\alpha^2 x^7 y^2 + 2xy^8\right]\vec{\imath} + \left[8y^{\alpha^2-1}x^2 + 2yx^8\right]\vec{\jmath}\,.$$
Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale è conservativo nel suo dominio e calcolarne un potenziale.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S z(1+2\cos^2(y-x))^{-1/2}\, dS$ dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin(y-x)\,, 0 \leq x \leq \pi\,, x \leq y \leq x+7\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $[0,+\infty[$:
$$f_n(x) = \frac{7x^n}{7+x^n}.$$

Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$. Si discuta la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $[0, +\infty[$ e/o in suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t(e^y - 2)$, $y(0) = y_0$. Discutere, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale. Determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari) e le soluzioni stazionarie. Studiare, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia. Dal comportamento qualitativo delle soluzioni discutere, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se l'intervallo massimale di esistenza può essere tutto $\mathbb{R}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' - \dfrac{y'}{t} = \dfrac{8t}{t^2+1}$, $y(1) = 2(\pi - 2)$, $y'(1) = 2\pi$. (Suggerimento: porre $z(t) = y'(t) \ldots$).

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = e^{-2|x|}$ e prolungata per periodicità. Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier; si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$. Si calcoli $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2]$.

....

Risposta [4 punti]:
