Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2+7} - e^7}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y-2 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\,; 0 \leq y \leq 2\}$ e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $g(x,y) = 2x + y$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{7}\sqrt{7^3 + 4x^2y^2}\,ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \sqrt{7}\cos t\,\vec{i} + \sqrt{7}\sin t\,\vec{j} + \cos^2 t\,\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{12}{7} x^2 \, dxdydz$$

dove $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z \leq 2, \; 0 \leq z \leq 2\}$

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2+nx}}, \quad x \geq 0$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi. Discutere se vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[0, 1]$.

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n!)^{2\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Discutere la convergenza puntuale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e determinare la sua funzione somma $S(x)$ nel caso di $\alpha = \frac{1}{2}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = \frac{14y^8 x e^{7x^2}}{y^2 + e^{7x^2}} \, \vec{i} + y^7 \left[8 \log(y^2 + e^{7x^2}) + \frac{2y^2}{y^2 + e^{7x^2}} \right] \vec{j} \, ,$$

calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ la semicirconferenza di centro $(0, 1/2)$, raggio $1/2$ e ascisse positive percorsa in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 3) - \frac{\pi}{4} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2+7} - e^7}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y-2 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\,; 0 \leq y \leq 2\}$ e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $g(x,y) = 2x + y$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

. . . .

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{7}\sqrt{7^3 + 4x^2y^2}ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \sqrt{7}\cos t\,\vec{i} + \sqrt{7}\sin t\,\vec{j} + \cos^2 t\,\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{12}{7} x^2 \, dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z \leq 2, \; 0 \leq z \leq 2\}$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2+nx}}, \quad x \geq 0$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi. Discutere se vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[0,1]$.

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n!)^{2\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Discutere la convergenza puntuale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e determinare la sua funzione somma $S(x)$ nel caso di $\alpha = \frac{1}{2}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = \frac{14y^8 x e^{7x^2}}{y^2 + e^{7x^2}}\,\vec{\imath} + y^7\left[8\log(y^2 + e^{7x^2}) + \frac{2y^2}{y^2 + e^{7x^2}}\right]\vec{\jmath}\,,$$

calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ la semicirconferenza di centro $(0, 1/2)$, raggio $1/2$ e ascisse positive percorsa in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 3) - \frac{\pi}{4} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
