Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), numero di matricola e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 3 e 5 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
6. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 90 min.

---

1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2+nx}}, \quad x \geq 0$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi. Discutere se vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[0, 1]$.

   Risposta :

---

2. Siano dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n!)^{2\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Discutere la convergenza puntuale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e determinare la sua funzione somma $S(x)$ nel caso di $\alpha = \frac{1}{2}$.

   ....

   Risposta :

---

3. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie trigonometrica

$$\frac{5}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^{\beta-7}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Si discuta la convergenza uniforme (dalla convergenza totale) al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. La convergenza puntuale (ma non uniforme) si può presentare per qualche valore di β?

   ....

   Risposta :

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 3 - \frac{|x|}{\pi}$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Verificare che la sua serie di Fourier è data dall'esercizio precedente nel caso $\beta = 9$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcoli quindi $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

. . . .

Risposta :

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 3) - \frac{\pi}{4} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta :

---

1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2+nx}}$, $x \geq 0$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi. Discutere se vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[0,1]$.

   Risposta :

2. Siano dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n!)^{2\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Discutere la convergenza puntuale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e determinare la sua funzione somma $S(x)$ nel caso di $\alpha = \frac{1}{2}$.

   ...

   Risposta :

3. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie trigonometrica
$$\frac{5}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^{\beta-7}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
   Si discuta la convergenza uniforme (dalla convergenza totale) al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. La convergenza puntuale (ma non uniforme) si può presentare per qualche valore di β?

   ...

   Risposta :

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 3 - \frac{|x|}{\pi}$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Verificare che la sua serie di Fourier è data dall'esercizio precedente nel caso $\beta = 9$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcoli quindi $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

   ...

   Risposta :

5. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 3) - \frac{\pi}{4} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
   Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

   ...

   Risposta :