Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^3) + 7\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 0, \ -x-1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ e sia $f(x,y) = 9x^2y$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 3 punti]:

---

3. Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = 2z^2e^{-x}\vec{i} + \alpha y \sin(\pi z)\vec{j} + \left[y^2\cos(\pi z) + \beta z e^{-x}\right]\vec{k}$$

è conservativo. Per tali valori di α e β calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è il segmento che congiunge i punti $(0,0,\sqrt{2})$ e $(0,\pi,1)$ percorso dal primo punto al secondo.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Sia S la superficie data in forma parametrica $\vec{r}(u,v) = 2u\,v\,\vec{i} + (u+v)\vec{j} + (u-v)\vec{k}$ con $(u,v) \in T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \; u^2 + v^2 \leq 1/4\}$. Calcolare l'area di S.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(n^{(x-2)} + 2\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n(x^2-1)}}{n^{\beta+7}}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e uniforme della serie (*può essere utile porre* $e^{x^2-1} = t$).

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\iint_T \frac{1}{4} x|y| \log x \, dxdy$, dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; |y| \leq 2/\sqrt{x}, \; 2 \leq x \leq 3\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sin y}{\sin y + 2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi]$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi]$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^3) + 7\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \leq 0,\; -x-1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ e sia $f(x,y) = 9x^2y$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 3 punti]:

---

3. Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = 2z^2e^{-x}\vec{i} + \alpha y\sin(\pi z)\vec{j} + \left[y^2\cos(\pi z) + \beta z e^{-x}\right]\vec{k}$$

è conservativo. Per tali valori di α e β calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\Gamma$, dove Γ è il segmento che congiunge i punti $(0,0,\sqrt{2})$ e $(0,\pi,1)$ percorso dal primo punto al secondo.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Sia S la superficie data in forma parametrica $\vec{r}(u,v) = 2u\,v\,\vec{i} + (u+v)\vec{j} + (u-v)\vec{k}$ con $(u,v) \in T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\; u^2+v^2 \leq 1/4\}$. Calcolare l'area di S.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(n^{(x-2)} + 2\right)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n(x^2-1)}}{n^{\beta+7}}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e uniforme della serie (*può essere utile porre* $e^{x^2-1} = t$).

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\iint_T \frac{1}{4} x|y| \log x \, dxdy$, dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |y| \leq 2/\sqrt{x},\ 2 \leq x \leq 3\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sin y}{\sin y + 2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi]$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi]$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
