Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ MECLT ♢ MATLT ♢ AUTLT ♢ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + 7y)\sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinare se esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ed, in caso affermativo, calcolarle. f è continua in $(0,0)$? Motivare la risposta.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si considerino la funzione $g(x,y) = \sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2}$ e il dominio T dato dal triangolo di vertici $(-3,0)$, $(3,0)$ e $(0,3)$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su T ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

---

3. Dopo aver determinato il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1} + (\alpha - 1)z\right)\vec{i}_1 + \left(\frac{y}{x^2+y^2+1} + \arctan z\right)\vec{i}_2 + \left(3x + \frac{y}{z^2+1}\right)\vec{i}_3\,,$$

è conservativo in tutto $\mathbb{R}^3$, calcolare il potenziale φ di $\vec{F}$ tale che $\varphi(0,0,0) = 0$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \leq z \leq 3 - \frac{x^2}{2} - y^2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n^2 2^n x^2}$. Si discuta la validità della relazione $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$ e si commenti in modo opportuno.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \cos y\, e^{-(y+1)^2}$, $\quad y(0) = \beta$. Si determini, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, la monotonia della soluzione e gli asintoti.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi - |x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; si calcoli $a_1 + b_1$, essendo $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier.

....

Risposta [3 punti]:

---

8. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma 3x\,y^2 \sin(\sqrt{x^2 + y^2}\,\frac{\pi}{4})\,ds$ dove Γ è l'arco di circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2 giacente nel primo quadrante.

....

Risposta [3 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+7y)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Determinare se esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ed, in caso affermativo, calcolarle. f è continua in $(0,0)$? Motivare la risposta.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si considerino la funzione $g(x,y) = \sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2}$ e il dominio T dato dal triangolo di vertici $(-3,0)$, $(3,0)$ e $(0,3)$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su T ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

---

3. Dopo aver determinato il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il campo vettoriale
$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1} + (\alpha-1)z\right)\vec{i}_1 + \left(\frac{y}{x^2+y^2+1} + \arctan z\right)\vec{i}_2 + \left(3x + \frac{y}{z^2+1}\right)\vec{i}_3\,,$$
è conservativo in tutto $\mathbb{R}^3$, calcolare il potenziale φ di $\vec{F}$ tale che $\varphi(0,0,0) = 0$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il volume del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}(x^2-y^2) \leq z \leq 3 - \frac{x^2}{2} - y^2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n^2 2^n x^2}$. Si discuta la validità della relazione $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$ e si commenti in modo opportuno.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \cos y \, e^{-(y+1)^2}$, $\quad y(0) = \beta$. Si determini, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, la monotonia della soluzione e gli asintoti.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi - |x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; si calcoli $a_1 + b_1$, essendo $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier.

....

Risposta [3 punti]:

---

8. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma 3x\, y^2 \sin(\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\pi}{4})\, ds$ dove Γ è l'arco di circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2 giacente nel primo quadrante.

....

Risposta [3 punti]:
