Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◇ EDIQQ ◇ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(e^{7\sin x} - 1\right) \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia D la regione limitata del piano determinata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $x - y + 2 = 0$. Data

$$g(x,y) = \frac{2}{3}x + y\,,$$

determinare $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ e Γ è la circonferenza di centro $(2,2)$ e raggio 1 percorsa una volta in senso antiorario.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\, dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \geq 0 \, , 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\alpha > 0$. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da $f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha} e^{-\dfrac{x^2}{n^{14}}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{\ln(n+1)} x^n \, .$$

Si calcoli il raggio di convergenza e, nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si determini l'insieme di convergenza uniforme.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = -2x$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 0$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n con $n \in \mathbb{N}$ e b_n con $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2-3y} - 1 \, , \\ y(0) = y_0 \, . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e/o a sinistra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(e^{7\sin x} - 1\right) \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia D la regione limitata del piano determinata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $x - y + 2 = 0$. Data

$$g(x,y) = \frac{2}{3}x + y\,,$$

determinare $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ e Γ è la circonferenza di centro $(2,2)$ e raggio 1 percorsa una volta in senso antiorario.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\, dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\ , 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\alpha > 0$. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da $f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha} e^{-\dfrac{x^2}{n^{14}}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{\ln(n+1)} x^n \, .$$

Si calcoli il raggio di convergenza e, nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si determini l'insieme di convergenza uniforme.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = -2x$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 0$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n con $n \in \mathbb{N}$ e b_n con $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2 - 3y} - 1 \, , \\ y(0) = y_0 \, . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e/o a sinistra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
