Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\arctan x^3}{(x^2+y^2)^{\alpha-1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 4 \leq y \leq 2 - |x|\}$ e sia $f(x,y) = y + x + \frac{1}{4}$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 3 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = [e^x(7\sin x + \cos y) + 7e^x \cos x + \sin y]\,\vec{i} + (1 + x\cos y - e^x \sin y)\,\vec{j}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ la semicirconferenza di centro $(0, \pi/2)$, raggio $\pi/2$ e ascisse positive percorsa in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S 3z\,dS$ dove S è la superficie data da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{2(x^2+y^2)},\ 0 \le z \le 2\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{\left(\frac{x}{7}\right)^n}, \qquad x \in [0, +\infty[, \quad n \ge 1.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi. Si consideri la successione $\{f_n'\}$ e si determini l'insieme I' di convergenza puntuale, confrontandolo con I.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^{7\beta}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, si discuta la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ e totale in $]-\infty, 0]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (y-2)(x^2-1)^2.$$

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-2)\arctan^2(y-2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\arctan x^3}{(x^2+y^2)^{\alpha-1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 4 \leq y \leq 2 - |x|\}$ e sia $f(x,y) = y + x + \frac{1}{4}$. Determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

. . . .

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 3 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = [e^x(7\sin x+\cos y)+7e^x\cos x+\sin y]\,\vec{i}+(1+x\cos y-e^x\sin y)\,\vec{j}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\Gamma$, dove Γ la semicirconferenza di centro $(0,\pi/2)$, raggio $\pi/2$ e ascisse positive percorsa in senso antiorario.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S 3z\,dS$ dove S è la superficie data da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{2(x^2+y^2)},\ 0 \leq z \leq 2\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{\left(\frac{x}{7}\right)^n}, \qquad x \in [0,+\infty[, \quad n \geq 1\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi. Si consideri la successione $\{f_n'\}$ e si determini l'insieme I' di convergenza puntuale, confrontandolo con I.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^{7\beta}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, si discuta la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ e totale in $]-\infty, 0]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (y-2)(x^2-1)^2 .$$

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-2)\arctan^2(y-2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
