Analisi Matematica II 13 LUGLIO 2015 FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: $\diamondsuit$ EDIQQ $\diamondsuit$ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 7(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0, 0)$. Verificare la continuità delle derivate parziali in $(0, 0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = xe^{-7x^2} + y^2 - y\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma (x^2 + y^2)\, ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = e^t \cos t\, \vec{i} + e^t \sin t\, \vec{j} + t\, \vec{k}, \qquad t \in [0, 2\pi]$

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Sia S la superficie data dalla porzione di cilindro circolare di rappresentazione parametrica $\vec{r}(u,v) = 2\cos u\vec{i} + 2\sin u\vec{j} + v\vec{k} \quad (u,v) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0,3]$. Calcolare l'integrale esteso alla superficie S $\iint_S 2x^2 e^z \, dS$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_n(x) = \arctan\left((n+1)^7 \left(\frac{x}{7}\right)^n\right).$$
Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ \frac{6}{\pi}x & \text{se } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 3\sin x & \text{se } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$
e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1 e b_1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare $S(\frac{5\pi}{2})$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Dopo aver determinato per quale valore del parametro reale β il campo vettoriale
$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left[\frac{2x-2}{(x-1)^2+y^2} + 2(\beta-2)xy^2e^{x^2y^2}\right]\overrightarrow{i} + \left[\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} + 4x^2ye^{x^2y^2}\right]\overrightarrow{j}$$
è conservativo nel suo dominio, per tale valore di β calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ l'arco di circonferenza di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = (1+\cos t)\vec{i} + \sin t\,\vec{j}, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \dfrac{y^2-4}{y^2+4}$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 7(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$. Verificare la continuità delle derivate parziali in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xe^{-7x^2} + y^2 - y\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma (x^2+y^2)\,ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = e^t \cos t\,\vec{i} + e^t \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}, \qquad t \in [0, 2\pi]$

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Sia S la superficie data dalla porzione di cilindro circolare di rappresentazione parametrica $\vec{r}(u,v) = 2\cos u\vec{i} + 2\sin u\vec{j} + v\vec{k} \quad (u,v) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0,3]$. Calcolare l'integrale esteso alla superficie S $\iint_S 2x^2e^z\,dS$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \arctan\left((n+1)^7\left(\frac{x}{7}\right)^n\right).$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ \frac{6}{\pi}\,x \quad \text{se} \;\; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 3\sin x \quad \text{se} \;\; \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1 e b_1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare $S(\frac{5\pi}{2})$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Dopo aver determinato per quale valore del parametro reale β il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \left[\frac{2x-2}{(x-1)^2 + y^2} + 2(\beta - 2)xy^2 e^{x^2y^2}\right] \overrightarrow{i} + \left[\frac{2y}{(x-1)^2 + y^2} + 4x^2 y e^{x^2y^2}\right] \overrightarrow{j}$$

è conservativo nel suo dominio, per tale valore di β calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ l'arco di circonferenza di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = (1 + \cos t)\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \dfrac{y^2 - 4}{y^2 + 4}$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:
