Analisi Matematica II — 14 GENNAIO 2013 — FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ EDIQQ ♢ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la continuità e la derivabilità in $(0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \sin(y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 2(x-1)^2(x-y^2) + 7\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Determinare $\beta \in \mathbb{R}$ per cui il campo vettoriale $\vec{F}$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = (\cos x + \log(y^3))\vec{\imath}_1 + \left(\beta\frac{x}{y} + \frac{e^y}{1+e^{2y}}\right)\vec{\imath}_2$$

è conservativo nel suo dominio. Per tale valore di β, determinare un potenziale di $\vec{F}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_V 6z\, dxdydz$ dove V è il dominio definito da $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \log\left(1 + n\left(\frac{x}{7}\right)^n\right)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-1}, \quad x \in [0, +\infty[\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\gamma \in [0, +\infty[$. Si consideri la seguente serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^\gamma + 1} 3^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}$. Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\gamma \in [0, +\infty[$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \sin x$, se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 2x$, se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$.

....

Risposta [3 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\dfrac{4 - y^2}{y}, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la monotonia e le eventuali simmetrie delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la continuità e la derivabilità in $(0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \sin(y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 2(x-1)^2(x-y^2) + 7\,.$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

3. Determinare $\beta \in \mathbb{R}$ per cui il campo vettoriale $\vec{F}$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = (\cos x + \log(y^3))\vec{i}_1 + \left(\beta \frac{x}{y} + \frac{e^y}{1+e^{2y}}\right)\vec{i}_2$$

è conservativo nel suo dominio. Per tale valore di β, determinare un potenziale di $\vec{F}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_V 6z\, dxdydz$ dove V è il dominio definito da $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \log\left(1 + n\left(\frac{x}{7}\right)^n\right)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-1}, \quad x \in [0,+\infty[\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\gamma \in [0,+\infty[$. Si consideri la seguente serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^\gamma + 1} 3^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}$. Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\gamma \in [0,+\infty[$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x) = \sin x$, se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 2x$, se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$.

....

Risposta [3 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\dfrac{4-y^2}{y}, \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la monotonia e le eventuali simmetrie delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

....

Risposta [5 punti]:
