Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: $\diamondsuit$ EDIQQ $\diamondsuit$ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,3)$. Data $g(x,y) = 4xye^{y+3x}$, determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove

$$\vec{F}(x,y) = 7ye^x\,\vec{i} + (7e^x - \cos y)\,\vec{j}$$

e Γ è l'arco di semicirconferenza $\{x^2 + (y-1)^2 = 1\ , y \geq 1\}$, percorso in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il volume del solido V definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 \leq 4\,, 0 \leq z \leq x + 2\}\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\geq 1}$ definita da $f_n(x) = \arctan(n^{x-7})$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite f. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2 + 7n}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

   Si discuta la convergenza puntuale e la convergenza totale. (*può essere utile ricordare che* $|\arctan t| \leq |t|\,,\ \forall t \in \mathbb{R}$)

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 8\left(\cosh\left(\frac{y}{2}\right) - 1\right) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0 e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4\dfrac{(e^{y/2} - 1)^2}{e^{y/2}} \\ y(0) = 2\log 2. \end{cases}$$

   e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

....

Risposta [3 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,3)$. Data $g(x,y) = 4xye^{y+3x}$, determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

. . . .

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove

$$\vec{F}(x,y) = 7ye^x\,\vec{i} + (7e^x - \cos y)\,\vec{j}$$

e Γ è l'arco di semicirconferenza $\{x^2 + (y-1)^2 = 1\ , y \geq 1\}$, percorso in senso antiorario.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il volume del solido V definito da

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 \leq 4\,, 0 \leq z \leq x+2\}\,.$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\geq 1}$ definita da $f_n(x) = \arctan(n^{x-7})$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite f. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2+7n}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

Si discuta la convergenza puntuale e la convergenza totale. (*può essere utile ricordare che* $|\arctan t| \leq |t|\,,\ \forall t \in \mathbb{R}$)

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 8\left(\cosh\left(\frac{y}{2}\right) - 1\right) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0 e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4\dfrac{(e^{y/2}-1)^2}{e^{y/2}} \\ y(0) = 2\log 2. \end{cases}$$

e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

....

Risposta [3 punti]:
