Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◇ EDIQQ ◇ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+7y^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (y - x^2)^4 (y + x + \alpha - 1)\,.$$

Classificare il punto $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove

$$\vec{F} = \left(\log(x+7y) + \frac{x}{x+7y} \right) \vec{i} + \frac{7x}{x+7y} \vec{j}$$

e Γ è l'arco di curva dato da $y = x^3$, $x \in [1, \sqrt[3]{2}]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'area della superficie S definita da $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\,,\, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\,,\, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = n^{\alpha-1} e^{-(x-n)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si discuta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2} x^7}{(2n+1)(n!)^{\beta-1}(2n+2)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Per $\beta = 1$ si calcoli la funzione somma $S(x)$ in un opportuno intorno di $x = 0$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $ty' + y = ty^2 \log t \quad y(1) = \frac{1}{7}$. (*suggerimento: porre* $y = \frac{1}{z}$)

....

Risposta [3 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \log(y^2 + \frac{1}{2})$, $y(0) = y_0$. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 7y^3}{x^2 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (y - x^2)^4 (y + x + \alpha - 1)\,.$$

Classificare il punto $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove

$$\vec{F} = \left(\log(x + 7y) + \frac{x}{x + 7y} \right) \vec{i} + \frac{7x}{x + 7y} \vec{j}$$

e Γ è l'arco di curva dato da $y = x^3$, $x \in [1, \sqrt[3]{2}]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'area della superficie S definita da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\,,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = n^{\alpha - 1} e^{-(x-n)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si discuta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2} x^7}{(2n+1)(n!)^{\beta-1}(2n+2)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo. Per $\beta = 1$ si calcoli la funzione somma $S(x)$ in un opportuno intorno di $x = 0$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $ty' + y = ty^2 \log t \quad y(1) = \frac{1}{7}$. (*suggerimento: porre* $y = \frac{1}{z}$)

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \log(y^2 + \frac{1}{2})$, $\;y(0) = y_0$. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e globale e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:
