Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◊ MECLT ◊ MATLT ◊ AUTLT ◊ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+7\sin(x^2y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da:

$$f(x,y) = \alpha^2x^2 + 2\alpha xy + y^2 \quad \text{e} \quad g(x,y) = (y-x+2)^3.$$

Determinare per quali valori di α le due funzioni ammettono punti stazionari in comune e classificarli.

....

Risposta [Determinazione dei punti stazionari 2 punti, classificazione 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo rispetto alla lunghezza d'arco $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{y}\, ds$ ove Γ ha rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = (2\cos t, t^2, 2\sin t)$, $-1 \leq t \leq 1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare $\displaystyle\iint_T 3x\,dxdy$, ove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \geq 1, \ \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\arctan\frac{x}{7}\right)^n}{49 + x^2} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si determini il limite puntuale f e si discuta la convergenza uniforme in tutto $\mathbb{R}$ e nei suoi sottoinsiemi. Calcolare $l_1 = \lim_{n\to+\infty}\int_0^6 f_n(x)\,dx$ e $l_2 = \lim_{n\to+\infty}\int_0^7 f_n(x)\,dx$.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 6\sin 2x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1, a_2.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t\log\left(1 + \frac{y^2-4}{y^2+9}\right)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. La soluzione è pari? Si studino poi monotonia, limitatezza e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Risolvere il problema di Cauchy $x^3y'' + x^2y' = 2 \quad y(1) = 3 \ y'(1) = 0$.

....

Risposta [3 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2 + 7\sin(x^2 y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da:

$$f(x,y) = \alpha^2 x^2 + 2\alpha xy + y^2 \quad \text{e} \quad g(x,y) = (y - x + 2)^3.$$

Determinare per quali valori di α le due funzioni ammettono punti stazionari in comune e classificarli.

....

Risposta [Determinazione dei punti stazionari 2 punti, classificazione 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo rispetto alla lunghezza d'arco $\int_\Gamma \sqrt{y}\, ds$ ove Γ ha rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = (2\cos t, t^2, 2\sin t)$, $-1 \le t \le 1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare $\displaystyle\iint_T 3x\, dxdy$, ove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \ge 1,\ \frac{x^2}{9} + y^2 \le 1\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{\left(\frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{7}\right)^n}{49 + x^2} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si determini il limite puntuale f e si discuta la convergenza uniforme in tutto $\mathbb{R}$ e nei suoi sottoinsiemi. Calcolare $l_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^6 f_n(x)\, dx$ e $l_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^7 f_n(x)\, dx$.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 6\sin 2x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1, a_2.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t \log\left(1 + \frac{y^2-4}{y^2+9}\right)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. La soluzione è pari? Si studino poi monotonia, limitatezza e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Risolvere il problema di Cauchy $x^3y'' + x^2y' = 2 \quad y(1) = 3 \; y'(1) = 0$.

. . . .

Risposta [3 punti]:
