Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ MECLT ♢ MATLT ♢ AUTLT ♢ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 \sin(7x)}{(x^2+y^2)(|x|+|y|)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Dopo averne determinato il dominio A, classificare i punti stazionari della funzione $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $g(x,y) = x + \frac{y^2}{4x} - \log(2+y)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Dopo aver determinato per quale valore del parametro reale α il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left[3x^2\log(y^2+1) + \frac{y^4}{1+x^2}\right]\overrightarrow{i} + \left[\frac{2x^3y}{1+y^2} + \alpha y^3 \arctan x\right]\overrightarrow{j}$$

è conservativo nel suo dominio, per tale valore di α calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ la curva $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $0 \le x \le 1$, percorsa nel verso che va dal punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$.

....

Risposta [4 punti]:

4. Calcolare il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4y - 1\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x) = 3x^{2n} \arctan x^{2n+1}$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(7x + \frac{\arcsin x}{n}\right)^n$, $\quad x \in [0, 1]$. Determinare l'insieme di convergenza puntuale e discutere la convergenza totale.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan \frac{y^2-49}{y^2+49}, \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi poi monotonia, asintoti, convessità della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Calcolare l'area della regione del piano individuata dall'arcata di cicloide di equazioni parametriche $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e il segmento dell'asse x con $0 \leq x \leq 2\pi$ (suggerimento: usare il teorema di Green e tenere presente il verso di percorrenza antiorario).

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

1. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2\sin(7x)}{(x^2+y^2)(|x|+|y|)} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

2. Dopo averne determinato il dominio A, classificare i punti stazionari della funzione $g:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da $g(x,y)=x+\frac{y^2}{4x}-\log(2+y)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

3. Dopo aver determinato per quale valore del parametro reale α il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y)=\left[3x^2\log(y^2+1)+\frac{y^4}{1+x^2}\right]\vec{i}+\left[\frac{2x^3y}{1+y^2}+\alpha y^3\arctan x\right]\vec{j}$$

è conservativo nel suo dominio, per tale valore di α calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\Gamma$, essendo Γ la curva $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $0\leq x\leq 1$, percorsa nel verso che va dal punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il volume del solido $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 4y-1\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x)=3x^{2n}\arctan x^{2n+1}$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(7x+\frac{\arcsin x}{n}\right)^n$, $\quad x\in[0,1]$. Determinare l'insieme di convergenza puntuale e discutere la convergenza totale.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\frac{y^2-49}{y^2+49}\,, \\ y(0)=y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0\in\mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi poi monotonia, asintoti, convessità della soluzione al variare di $y_0\in\mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Calcolare l'area della regione del piano individuata dall'arcata di cicloide di equazioni parametriche $\vec{r}(t)=(t-\sin t)\vec{i}+(1-\cos t)\vec{j}$, $0\le t\le 2\pi$ e il segmento dell'asse x con $0\le x\le 2\pi$ (suggerimento: usare il teorema di Green e tenere presente il verso di percorrenza antiorario).

. . . .

Risposta [3 punti]:
