Cognome e nome . . . . Firma . . . . Matricola . . . .

Corso di Laurea: ◇ MECLT ◇ MATLT ◇ AUTLT ◇ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Determinare il dominio della funzione f definita da

$$f(x,y) = \log \frac{4-4x^2-y^2}{x^2+y^2-1} + \frac{1}{\sqrt{\log(3+x^2+y^2)}}$$

. . . .

Risposta [3 punti]:

2. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = 2(y-1)|y-x^2|$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma x\,y\,ds$ dove Γ è l'arco di circonferenza di centro $(3,0)$ e raggio $1/2$ giacente nel primo quadrante.

. . . .

Risposta [3 punti]:

4. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove V è il dominio delimitato dalla superficie conica $z = 2-\sqrt{(x^2+y^2)}$ e dai piani $z=0$ e $z=1$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(x-n)^2} & \text{se } |x-n| \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Si determini il limite puntuale f. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$? E nei suoi sottoinsiemi limitati? Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^{\alpha-1}} \frac{x^{2n}}{49^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(\log^2 y + \frac{1}{2}\right)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}^+$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra o no, motivando la risposta. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni all'estremo destro degli intervalli massimali. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}^+$, la monotonia e la concavità delle soluzioni.

....

Risposta [6 punti]:

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' + \dfrac{y' \sin 2t}{1+\cos^2 t} = 0\,,\ y(0) = 7\,,\ y'(0) = 28\,.$

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Determinare il dominio della funzione f definita da

$$f(x,y) = \log \frac{4-4x^2-y^2}{x^2+y^2-1} + \frac{1}{\sqrt{\log(3+x^2+y^2)}}$$

....

Risposta [3 punti]:

---

2. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = 2(y-1)|y-x^2|$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\int_\Gamma x\,y\,ds$ dove Γ è l'arco di circonferenza di centro $(3,0)$ e raggio $1/2$ giacente nel primo quadrante.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove V è il dominio delimitato dalla superficie conica $z = 2 - \sqrt{(x^2+y^2)}$ e dai piani $z=0$ e $z=1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(x-n)^2} & \text{se } |x-n| \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Si determini il limite puntuale f. Converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$? E nei suoi sottoinsiemi limitati? Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^{\alpha-1}} \frac{x^{2n}}{49^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(\log^2 y + \frac{1}{2}\right) \,, \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}^+$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra o no, motivando la risposta. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni all'estremo destro degli intervalli massimali. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}^+$, la monotonia e la concavità delle soluzioni.

....

Risposta [6 punti]:

---

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' + \dfrac{y' \sin 2t}{1 + \cos^2 t} = 0 \,,\ y(0) = 7 \,,\ y'(0) = 28 \,.$

....

Risposta [4 punti]:
