
Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), numero di matricola e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 3 e 5 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
6. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 90 min.

---

1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{n}{x+2n}, \quad x \geq 0 .$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta :

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n!)^{2\alpha} \frac{x^n}{(n+1)!},$$

si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$; nei casi in cui è finito si studi anche la convergenza sul bordo.

....

Risposta :

---

3. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\cos x)^n}{n+2+e^{\cos x}}, \qquad x \in [0, \pi] .$$

Si discuta la convergenza puntuale in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e totale in $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. Converge in $x = \pi$?

....

Risposta :

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 1/2$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = \cos x/2$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta :

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 4) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta:

---

1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{n}{x+2n}, \quad x \geq 0\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta :

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n!)^{2\alpha} \frac{x^n}{(n+1)!},$$

si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$; nei casi in cui è finito si studi anche la convergenza sul bordo.

....

Risposta : ____

3. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\cos x)^n}{n+2+e^{\cos x}}, \qquad x \in [0,\pi]\,.$$

Si discuta la convergenza puntuale in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e totale in $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. Converge in $x = \pi$?

....

Risposta :

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 1/2$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = \cos x/2$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta :

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 4) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta:
