
Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\log(1+7x^3)}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,2)$. Data $g(x,y) = e^{x^2-y^2+2xy}$, determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Sia dato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{14x+y}{7(x^2+y^2+1)+xy} + e^y + ye^x\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{x+14y}{7(x^2+y^2+1)+xy} + xe^y + e^x\right)\overrightarrow{j}\,.$$

Calcolare gli integrali curvilinei $I_1 = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, $I_2 = \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$ dove Γ_1 l'arco di parabola $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$ mentre Γ_2 è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_T \left[2x^3 + \frac{3}{2}\right] dxdy$$
dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 + |x| \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \log\left((x-7)^n + \frac{n+2}{n+1}\right), \quad x \in [7, +\infty[.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\alpha \geq 7$ e sia data la serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n+1)^{\alpha-7}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \geq 7$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Per $\alpha = 7$ si calcoli la funzione somma $s(x)$ in un opportuno intorno di $x = 0$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\int_\Gamma 2z\sqrt{2z}\, ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos(2t)\,\vec{i} + \sin(2t)\,\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}, \qquad t \in [-1, 1]$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2+1}(y-3) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\log(1+7x^3)}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$

....

Risposta [5 punti]:

2. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,2)$. Data $g(x,y) = e^{x^2-y^2+2xy}$, determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

3. Sia dato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{14x+y}{7(x^2+y^2+1)+xy} + e^y + ye^x\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{x+14y}{7(x^2+y^2+1)+xy} + xe^y + e^x\right)\overrightarrow{j}\,.$$

Calcolare gli integrali curvilinei $I_1 = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, $I_2 = \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$ dove Γ_1 l'arco di parabola $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$ mentre Γ_2 è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \left[2x^3 + \frac{3}{2}\right] dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2+|x| \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$.

....

Risposta [4 punti]:

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left((x-7)^n + \frac{n+2}{n+1}\right)\,, \quad x \in [7, +\infty[.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\alpha \geq 7$ e sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n+1)^{\alpha-7}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \geq 7$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo e la convergenza uniforme. Per $\alpha = 7$ si calcoli la funzione somma $s(x)$ in un opportuno intorno di $x = 0$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\int_\Gamma 2z\sqrt{2z}\, ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos(2t)\,\vec{i} + \sin(2t)\,\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}, \qquad t \in [-1, 1]$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2+1}(y-3) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
