Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◊ EDIQQ ◊ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità in $(0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = x + y$ definita sul dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-2)^2 \leq y \leq 2 - x\}$. Calcolare il minimo m ed il massimo M di g su T specificando in quali punti essi vengono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Determinare per quale valore del parametro reale β il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy - \sin z)\,\vec{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \beta\frac{e^y}{z}\right)\vec{j} + \left(7\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\vec{k}$$

è conservativo in $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > 0\}$. Per tale valore di β determinare un potenziale.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare $\iint_T \left(\sin\left(y^3\right) + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,x\right)\,dxdy$, dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\,,\ |y| \le x\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}(\sqrt{x}-1)^n\,, \quad x \ge 0\,,$$

determinare l'insieme A di convergenza puntuale. Calcolare la somma della serie in A (suggerimento: porre $\frac{\sqrt{x}-1}{2} = t \ldots$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{4}{\pi}x & \text{se } -\pi < x \le 0, \\ 2\cos x & \text{se } 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione $\tilde{u}$ del problema di Cauchy $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}$, $y(0) = \sqrt{2}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente; in particolare determinare l'intervallo massimale di esistenza e gli eventuali asintoti.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità in $(0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

....

Risposta [4 punti]:

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = x + y$ definita sul dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-2)^2 \leq y \leq 2 - x\}$. Calcolare il minimo m ed il massimo M di g su T specificando in quali punti essi vengono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

3. Determinare per quale valore del parametro reale β il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy - \sin z)\,\vec{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \beta\frac{e^y}{z}\right)\vec{j} + \left(7\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\vec{k}$$

è conservativo in $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > 0\}$. Per tale valore di β determinare un potenziale.

....

Risposta [4 punti]:

4. Calcolare $\iint_T \left(\sin\left(y^3\right) + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,x\right)\,dxdy$, dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\,,\ |y| \leq x\}$.

....

Risposta [4 punti]:

5. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}(\sqrt{x}-1)^n\,, \quad x \geq 0\,,$$

determinare l'insieme A di convergenza puntuale. Calcolare la somma della serie in A (suggerimento: porre $\frac{\sqrt{x}-1}{2} = t\ldots$).

....

Risposta [4 punti]:

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{4}{\pi}x & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 2\cos x & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione $\tilde{u}$ del problema di Cauchy $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}$, $y(0) = \sqrt{2}$ e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente; in particolare determinare l'intervallo massimale di esistenza e gli eventuali asintoti.

....

Risposta [4 punti]:
