
Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{2xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3 \le x+y \le 6\,,\, \frac{1}{2}x \le y \le 2x\}$. Data $g(x,y) = xy+1$, determinare $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma 6y\,ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$, $\quad t \in [0,1]$.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_S \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dS$$

dove S è la porzione di paraboloide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2\,, x^2+y^2 \leq 2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{2n+e^{nx}}\,, \quad x \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la seguente serie di potenze. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \left(2^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\beta}$. Si calcoli il raggio di convergenza, al variare di $\beta \geq 0$, e, nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Per $\beta = 0$, calcolare la somma $S(x)$ della serie.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove $\vec{F}(x,y) = (2ye^y - 2e^y + \cos x)\,\vec{\imath} + (2xye^y)\,\vec{\jmath}$ e Γ è l'arco di semicirconferenza $\{(x-1)^2 + y^2 = 1\ , x \geq 1\}$, percorso in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t^2 \arctan(y^2-4) \quad y(0) = y_0$. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi la monotonia delle soluzioni. Si discuta l'esistenza di eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{2xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 3 \leq x+y \leq 6 \, , \frac{1}{2}x \leq y \leq 2x\}$. Data $g(x,y) = xy+1$, determinare $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\int_\Gamma 6y ds$ dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = t^2 \, \vec{i} + 2t \, \vec{j} + 2 \, \vec{k}, \quad t \in [0,1]$.

....

Risposta [3 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_S \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \, dS$$

dove S è la porzione di paraboloide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2 \, , x^2+y^2 \leq 2\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{2n + e^{nx}} \, , \quad x \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la seguente serie di potenze. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \left(2^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\beta}$. Si calcoli il raggio di convergenza, al variare di $\beta \geq 0$, e, nel caso in cui sia finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Per $\beta = 0$, calcolare la somma $S(x)$ della serie.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove $\vec{F}(x,y) = (2ye^y - 2e^y + \cos x)\,\vec{i} + (2xye^y)\,\vec{j}$ e Γ è l'arco di semicirconferenza $\{(x-1)^2 + y^2 = 1\ , x \geq 1\}$, percorso in senso antiorario.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t^2 \arctan(y^2 - 4) \quad y(0) = y_0$. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi la monotonia delle soluzioni. Si discuta l'esistenza di eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

. . . .

Risposta [5 punti]:
