Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◇ MECLT ◇ MATLT ◇ AUTLT ◇ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Determinare il dominio della funzione f definita da

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x} + \log(3x) + 7}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

....

Risposta [4 punti]:

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{3}x^2 + xy + 6x$.

....

Risposta [4 punti]:

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\gamma \frac{2(x+y)}{x^2}\, ds$ dove γ è il grafico della funzione $f(x) = x(-1+\ln x)$ con $1 \le x \le e^7$.

....

Risposta [4 punti]:

4. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\frac{4}{3}\iint_T \frac{x^3 y}{x^2+y^2}\, dxdy$, dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2+y^2 \le 2\ , 0 \le y \le x\}$.

....

Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $[0,+\infty[$:

$$f_n(x) = \frac{x^n - 2}{x^n + 2}$$

Si determini il limite puntuale f. Si discuta la convergenza uniforme in tutto $[0,+\infty[$ e nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{7^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n^\alpha + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Calcolare la somma della serie nel caso $\alpha = 1$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x) = 7(x+\pi)$ e prolungata per periodicità. Sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t^3(e^{\sin y} - 1)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari). Si studino poi monotonia e asintoti della soluzione al variare di $y_0 \in]0, 2\pi[$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Determinare il dominio della funzione f definita da

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x} + \log(3x) + 7}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{3}x^2 + xy + 6x$.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\int_\gamma \frac{2(x+y)}{x^2}\, ds$ dove γ è il grafico della funzione $f(x) = x(-1+\ln x)$ con $1 \leq x \leq e^7$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio $\frac{4}{3} \iint_T \frac{x^3 y}{x^2+y^2}\, dxdy$, dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\ , 0 \leq y \leq x\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $[0,+\infty[$:

$$f_n(x) = \frac{x^n - 2}{x^n + 2}$$

Si determini il limite puntuale f. Si discuta la convergenza uniforme in tutto $[0,+\infty[$ e nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{7^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n^\alpha + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Calcolare la somma della serie nel caso $\alpha = 1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 7(x + \pi)$ e prolungata per periodicità. Sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t^3(e^{\sin y} - 1)$, $y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari). Si studino poi monotonia e asintoti della soluzione al variare di $y_0 \in]0, 2\pi[$.

....

Risposta [4 punti]:
