

Cognome e nome.....Firma.....Matricola

Corso di Laurea: ◇ MECLT ◇ MATLT ◇ AUTLT ◇ EDIQQ ◇ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo.**
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

1. Si consideri la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Dopo aver determinato il suo dominio A , si discuta la differenziabilità di f nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$.

Si determinino inoltre i punti $P = (x_0, y_0)$ sulla bisettrice del primo e terzo quadrante tali che $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 1$, dove $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

.....

Risposta [4 punti]:

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, ove

$$f(x, y) = (y - 1)\left(\frac{x^2}{49} + y^2 - 1\right)^2 \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$$

.....

Risposta [Determinazione dei punti stazionari 2 punti, classificazione 2 punti]:

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \vec{G}$ dove $\vec{G} = \nabla f + 7e^x \vec{i}$ (f è il campo scalare dato nell'esercizio 1) e γ è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1 percorsa in senso orario.

.....

Risposta [4 punti]:

4. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^3 + 2x)\vec{i} + yx^2\vec{j} + \frac{1+y^2}{1+x^2}\vec{k}$ attraverso la superficie del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, delimitato dai piani $z = 0$ e $z = 7$.

.....

Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{e^{n(x-6)}}{e^{n(x-6)} + 6} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

.....

Risposta [4 punti]:

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2^n (n+1)(n!)^{\alpha-1}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si calcoli, se possibile, la funzione somma nel caso $\alpha = 2$.

.....

Risposta [4 punti]:

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π , definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ x + 7 & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $a_n, n \in \mathbb{N}$ e $b_n, n \in \mathbb{Z}^+$.

.....

Risposta [4 punti]:

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{(y-2)^2}{t^2+1}, y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0 ?

.....

Risposta [4 punti]:

1. Si consideri la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Dopo aver determinato il suo dominio A , si discuta la differenziabilità di f nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$.

Si determinino inoltre i punti $P = (x_0, y_0)$ sulla bisettrice del primo e terzo quadrante tali che $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 1$, dove $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

.....
Risposta [4 punti]:

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, ove

$$f(x, y) = (y - 1)\left(\frac{x^2}{49} + y^2 - 1\right)^2 \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$$

.....
Risposta [Determinazione dei punti stazionari 2 punti, classificazione 2 punti]:

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \vec{G}$ dove $\vec{G} = \nabla f + 7e^x \vec{i}$ (f è il campo scalare dato nell'esercizio 1) e γ è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1 percorsa in senso orario.

.....
Risposta [4 punti]:

4. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^3 + 2x) \vec{i} + yx^2 \vec{j} + \frac{1+y^2}{1+x^2} \vec{k}$ attraverso la superficie del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, delimitato dai piani $z = 0$ e $z = 7$.

.....
Risposta [4 punti]:

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ così definita :

$$f_n(x) = \frac{e^{n(x-6)}}{e^{n(x-6)} + 6} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

.....

Risposta [4 punti]:

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2^n (n+1) (n!)^{\alpha-1}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si determini il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo. Si calcoli, se possibile, la funzione somma nel caso $\alpha = 2$.

.....

Risposta [4 punti]:

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π , definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ x + 7 & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti $a_n, n \in \mathbb{N}$ e $b_n, n \in \mathbb{Z}^+$.

.....

Risposta [4 punti]:

8. Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{(y-2)^2}{t^2+1}, y(0) = y_0$. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino poi monotonia e asintoti al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0 ?

.....

Risposta [4 punti]:
