Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◊ MECLT ◊ MATLT ◊ AUTLT ◊ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^{\beta-1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si discuta al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la continuità di f in $\mathbb{R}^2$ e l'esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = x + \sin x + 7y^2 - \pi\,.$$

....

Risposta [Determinazione dei punti stazionari 1 punto, classificazione 3 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\int_\Gamma 2^{\frac{1}{2}} \frac{y^{\frac{1}{2}} \sin x \cos x}{\sqrt{1+(2y)}}\, ds$ con Γ di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j}$, $0 \le t \le 3\pi$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 20(x^2+y^2)\,dxdydz$ dove V è il dominio nel semispazio $y \geq 0$, delimitato dalla superficie conica $z = 2\sqrt{(x^2+y^2)}$ e dal piano $z = 2$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}\log^{\alpha-1} n}{e^{21n}}\,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t(1-e^{-y^2})(y-2)$, $y(0) = y_0$.

Discutere, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità (locale e globale); determinare le soluzioni stazionarie; determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari); studiare, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia delle soluzioni e gli eventuali asintoti.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' = 7\left(\frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2}\right)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 14$. (osservare che $\frac{d}{dt}(y') = 7\frac{d}{dt}(\frac{y}{t}) = \ldots$ e quindi $y' = 7\frac{y}{t} + \ldots$)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2, definita in $(-1, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ -x & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0; si discuta la convergenza puntuale della serie di Fourier, determinando, in particolare, a quali valori converge in $x = 2m$, $x = 2m + \frac{1}{2}$, $x = 2m + 1$, ove $m \in \mathbb{Z}$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

1. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^{\beta-1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si discuta al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la continuità di f in $\mathbb{R}^2$ e l'esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = x + \sin x + 7y^2 - \pi\,.$$

....

Risposta [Determinazione dei punti stazionari 1 punto, classificazione 3 punti]:

---

3. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma 2^{\frac{1}{2}} \frac{y^{\frac{1}{2}} \sin x \cos x}{\sqrt{1+(2y)}}\, ds$ con Γ di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j}$, $0 \leq t \leq 3\pi$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_V 20(x^2+y^2)\, dxdydz$ dove V è il dominio nel semispazio $y \geq 0$, delimitato dalla superficie conica $z = 2\sqrt{(x^2+y^2)}$ e dal piano $z = 2$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n} \log^{\alpha-1} n}{e^{21n}}\,.$$

Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e, nei casi in cui è finito, si studi anche la convergenza sul bordo.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $y' = t(1 - e^{-y^2})(y - 2)$, $y(0) = y_0$.

   Discutere, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità (locale e globale); determinare le soluzioni stazionarie; determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari); studiare, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia delle soluzioni e gli eventuali asintoti.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' = 7\left(\frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2}\right)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 14$. (osservare che $\frac{d}{dt}(y') = 7\frac{d}{dt}(\frac{y}{t}) = \ldots$ e quindi $y' = 7\frac{y}{t} + \ldots$)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2, definita in $(-1, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ -x & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

   e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare a_0; si discuta la convergenza puntuale della serie di Fourier, determinando, in particolare, a quali valori converge in $x = 2m$, $x = 2m + \frac{1}{2}$, $x = 2m + 1$, ove $m \in \mathbb{Z}$.

. . . .

Risposta [3 punti]:
