Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◊ MECLT ◊ MATLT ◊ AUTLT ◊ EDIQQ ◊ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Si consideri la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = (x-7)e^{y+8} + \sqrt{x^2 - 49y^2}\,.$$
Si determini il dominio A di f; verificare se esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ed in caso affermativo calcolarla; discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Siano f la funzione definita da
$$f(x,y) = (x+y)^2 \ln(x+y)$$
e T il trapezio chiuso di vertici $A = (1/\sqrt{e}, 0)$, $B = (2,0)$, $C = (0,2)$ e $D = (0, 1/\sqrt{e})$. Calcolare il minimo m ed il massimo M di f su T specificando in quali punti essi vengono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Siano $\beta \in \mathbb{R}^+$, $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da
$$\vec{F}(x,y) = \frac{y}{1+xy}\vec{i}_1 + \left(\frac{x}{1+xy} + y - 7\right)\vec{i}_2$$
e I_β l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo il segmento di estremi $A = (2,0)$ e $B = (0,\beta)$ percorso da A verso B. Trovare β in modo che I_β sia minimo.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare
$$\iint_T \frac{y}{(x-2)^2+y^2}\,dxdy$$
dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le (x-2)^2 + y^2 \le 4\,, y \le 0\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita : $f_n(x) = (7-x)\frac{x^n}{7^n}\,, \quad x \in [0,+\infty[$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi,\pi]$ da $f(x) = \frac{4}{\pi}x + 2$ se $-\pi < x \le 0$, $f(x) = 2\cos x$ se $0 < x \le \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Si calcoli $3b_2$. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 2t(e^{2y}-1)e^{-2y} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. La soluzione è pari? Si studi poi la monotonia e si discuta la possibilità di asintoti orizzontali. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 2t(e^{2y}-1)e^{-2y} \\ y(0) = -\frac{1}{2}\log 2\,, \end{cases}$$
verificare se l'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra, confrontando le conclusioni con l'esercizio precedente.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Si consideri la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = (x-7)e^{y+8} + \sqrt{x^2 - 49y^2}\,.$$
Si determini il dominio A di f; verificare se esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ed in caso affermativo calcolarla; discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

2. Siano f la funzione definita da
$$f(x,y) = (x+y)^2 \ln(x+y)$$
e T il trapezio chiuso di vertici $A = (1/\sqrt{e}, 0)$, $B = (2,0)$, $C = (0,2)$ e $D = (0, 1/\sqrt{e})$. Calcolare il minimo m ed il massimo M di f su T specificando in quali punti essi vengono assunti.

   ....

   Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Siano $\beta \in \mathbb{R}^+$, $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da
$$\vec{F}(x,y) = \frac{y}{1+xy}\vec{i}_1 + \left(\frac{x}{1+xy} + y - 7\right)\vec{i}_2$$
e I_β l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo il segmento di estremi $A = (2,0)$ e $B = (0,\beta)$ percorso da A verso B. Trovare β in modo che I_β sia minimo.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare
$$\iint_T \frac{y}{(x-2)^2 + y^2}\, dxdy$$
dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le (x-2)^2 + y^2 \le 4\,, y \le 0\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita : $f_n(x) = (7-x)\frac{x^n}{7^n}$, $\quad x \in [0, +\infty[$. Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \frac{4}{\pi}x + 2$ se $-\pi < x \leq 0$, $f(x) = 2\cos x$ se $0 < x \leq \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Si calcoli $3b_2$. Si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di S in $\mathbb{R}$ sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(2\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2t(e^{2y} - 1)e^{-2y} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente; si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. La soluzione è pari? Si studi poi la monotonia e si discuta la possibilità di asintoti orizzontali. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Dopo aver determinato la soluzione problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2t(e^{2y} - 1)e^{-2y} \\ y(0) = -\frac{1}{2}\log 2\,, \end{cases}$$

verificare se l'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra, confrontando le conclusioni con l'esercizio precedente.

....

Risposta [4 punti]:
