Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ EDIQQ ♢ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x+2)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

Stabilire se esistono le derivate direzionali di f in $(0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarle. Verificare se vale l'uguaglianza $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$, per ogni $\vec{v}$ versore di $\mathbb{R}^2$. Stabilire poi se f è differenziabile in $(0,0)$. f è continua in $(0,0)$?

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + xy + \alpha y^2\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = (e^x \sin y + 7y)\,\overrightarrow{i} + (e^x \cos y + 7x - 2y)\,\overrightarrow{j}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ l'arco di ellisse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$, percorsa in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'area della superficie S di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i_1} + u\sin v\vec{i_2} + u^2\vec{i_3}$$

con $(u,v) \in T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le \sqrt{2}\,, 0 \le v \le 2\pi\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^3 x}{n^3 x^2 + n^2 \log n}, \qquad x \in \mathbb{R}, n \ge 2\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \frac{|x|}{4}$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n, $n \in \mathbb{N}$, b_n, $n \in \mathbb{Z}^+$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{7^{7n-nx}}{n^\beta},$$

si studi la convergenza semplice ed assoluta al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Calcolarne la somma nel caso $\beta = 1$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 - 2\sin y)^3 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi[$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi[$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x+2)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

Stabilire se esistono le derivate direzionali di f in $(0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarle. Verificare se vale l'uguaglianza $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$, per ogni $\vec{v}$ versore di $\mathbb{R}^2$. Stabilire poi se f è differenziabile in $(0,0)$. f è continua in $(0,0)$?

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + xy + \alpha y^2\,.$$

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Dato il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = (e^x \sin y + 7y)\,\overrightarrow{i} + (e^x \cos y + 7x - 2y)\,\overrightarrow{j}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ l'arco di ellisse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$, percorsa in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'area della superficie S di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(u,v) = u \cos v \vec{i_1} + u \sin v \vec{i_2} + u^2 \vec{i_3}$$

con $(u,v) \in T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \sqrt{2}\,, 0 \leq v \leq 2\pi\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^3 x}{n^3 x^2 + n^2 \log n}, \qquad x \in \mathbb{R}, n \geq 2\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \frac{|x|}{4}$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_n, $n \in \mathbb{N}$, b_n, $n \in \mathbb{Z}^+$. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{7^{7n-nx}}{n^\beta},$$

si studi la convergenza semplice ed assoluta al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Calcolarne la somma nel caso $\beta = 1$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 - 2\sin y)^3 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi[$, se il problema ammette esistenza locale e globale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in [0, 2\pi[$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:
