Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log\left(1 + 7x^2y^2\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [5 punti]:

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2y(x^2+y^2-4)^2$. Verificare che $(0,0)$ e i punti di intersezione della circonferenza $x^2+y^2=4$ con gli assi cartesiani sono stazionari e classificarli.

....

Risposta [5 punti]:

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \frac{3}{2}(x^2-y^2)\,\vec{\imath} + (x^2+y^2)\,\vec{\jmath}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è la semicirconferenza di centro $(0,0)$, raggio 2, ordinate positive e percorsa in senso antiorario.

....

Risposta [4 punti]:

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \left(\frac{x e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2} + 2y \right) dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \; -x < y < x\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n+1} - x^n, \quad x \in [0, +\infty[\,.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi. Discutere se vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[0,1]$.

Risposta [5 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $[-\pi, \pi[$ da $f(x) = \frac{1}{2}$ se $-\pi \leq x < 0$, $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ se $0 \leq x < \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2, b_2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare $S(\frac{\pi}{2})$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+7}{n^\beta} (e^x - 3)^n, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale della serie.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y^2-4) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log\left(1+7x^2y^2\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$
Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

   ...

   Risposta [5 punti]:

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2y(x^2+y^2-4)^2$. Verificare che $(0,0)$ e i punti di intersezione della circonferenza $x^2+y^2=4$ con gli assi cartesiani sono stazionari e classificarli.

   ...

   Risposta [5 punti]:

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \frac{3}{2}(x^2-y^2)\,\vec{\imath} + (x^2+y^2)\,\vec{\jmath}$, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è la semicirconferenza di centro $(0,0)$, raggio 2, ordinate positive e percorsa in senso antiorario.

   ...

   Risposta [4 punti]:

4. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_T \left(\frac{x e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2} + 2y \right) dxdy$$
dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ -x < y < x\}$.

   ...

   Risposta [4 punti]:

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definita da
$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n+1} - x^n, \quad x \in [0,+\infty[\,.$$
Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi. Discutere se vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[0,1]$.

   Risposta [5 punti]:

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $[-\pi, \pi[$ da $f(x) = \frac{1}{2}$ se $-\pi \leq x < 0$, $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ se $0 \leq x < \pi$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2, b_2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della sua serie di Fourier, sulla base delle caratteristiche di f. Calcolare $S(\frac{\pi}{2})$.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+7}{n^\beta} (e^x - 3)^n, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale della serie.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y^2 - 4) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:
