Cognome .... Nome ....

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano $\alpha > 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{7(1-\cos x^2) - y^{2\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + \arctan(xy^2)$. Determinare i punti stazionari e classificarli.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$\vec{F}(x,y) = (e^x(\cos x - \sin x) + e^x \sin y + \cos y)\ \vec{i} + (e^x \cos y - x \sin y + 2y)\ \vec{j}\,;$$

calcolare $I_1 = \oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma_1$ essendo Γ_1 la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2, percorsa una volta in senso antiorario e $I_2 = \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma_2$ dove Γ_2 è il segmento congiungente $(0,0)$ e $(0,\pi)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\frac{1}{4}\iint_T \left(xy - 4y^2\right)\, dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2n\, x^n}{n + x^n}\,, \quad x \in [0,1] \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la serie di funzioni $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x) \quad x \in [0, +\infty[$, dove

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{x \exp(-nx^2)}{(\log n)^{2\beta}}\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

....

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \frac{\cos x}{2}$ se $|x| < \frac{\pi}{2}$, 0 altrimenti e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3 \frac{y^2-1}{e^{y^2}} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e asintoti delle soluzioni.

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Siano $\alpha > 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{7(1-\cos x^2) - y^{2\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha > 0$.

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + \arctan(xy^2)$. Determinare i punti stazionari e classificarli.

....

Risposta [4 punti]:

---

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$\vec{F}(x,y) = (e^x(\cos x - \sin x) + e^x \sin y + \cos y)\ \vec{i} + (e^x \cos y - x \sin y + 2y)\ \vec{j}\,;$$

calcolare $I_1 = \oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma_1$ essendo Γ_1 la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2, percorsa una volta in senso antiorario e $I_2 = \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma_2$ dove Γ_2 è il segmento congiungente $(0,0)$ e $(0,\pi)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\frac{1}{4} \iint_T \left(xy - 4y^2\right)\, dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 \le 4\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2n\, x^n}{n + x^n}\,, \quad x \in [0,1] \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

6. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la serie di funzioni $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x) \quad x \in [0, +\infty[$, dove

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{x \exp(-nx^2)}{(\log n)^{2\beta}}\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \frac{\cos x}{2}$ se $|x| < \frac{\pi}{2}$, 0 altrimenti e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Calcolare i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $S(x)$, sulla base delle caratteristiche di f. Si calcolino $S(4\pi)$, $S(\frac{5}{2}\pi)$, $S(3\pi)$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3 \frac{y^2-1}{e^{y^2}} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locali e globali e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia e asintoti delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:
