Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ◇ MECLT ◇ MATLT ◇ AUTLT ◇ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Determinare il dominio della funzione f definita da

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{\log(x^2+y^2-1)}{4-x^2-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2+y^2-1)}}$$

....

Risposta [3 punti]:

---

2. Si considerino la funzione $g(x,y) = 7^{xy}$ e il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 49y^2 = 1\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

---

3. Siano $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left(x^7 \exp(x^8) \arctan y + \log x\right) \vec{i} + \left(\frac{1}{\alpha(1+y^2)} \exp(x^8)\right) \vec{j}\,.$$

Si determinino il dominio A ed il valore di α per cui il campo vettoriale è conservativo in A. In corrispondenza di tale valore di α si calcoli un potenziale per $\vec{F}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T (x+z)\, dxdydz\,,$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\,,\ 1 \leq z \leq \sqrt{2}\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{7x}{1+(n+1)x} - \frac{7x}{1+nx} \right)\,, \qquad x \geq 0\,.$$

(suggerimento: la serie è telescopica: calcolare la ridotta n-esima $S_n(x)$ ...)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\sin(y-2\pi) \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Discutere, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità (locale e globale); determinare le soluzioni stazionarie; determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari); calcolare y''. Al variare di $y_0 \in]2\pi, 4\pi[$, studiare la monotonia delle soluzioni, gli asintoti e discutere l'esistenza di punti di flesso.

. . . .

Risposta [6 punti]:

---

7. Determinare la soluzione $y :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \dfrac{\tan x}{4} y = \dfrac{3\sin x}{4} y^3 \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,. \end{cases}$$

(suggerimento: porre $z = 1/y^2$...)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione, di periodo 2π, definita in $]-\pi,\pi]$ da $f(x) = \begin{cases} 3|\sin x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e prolungata per periodicità. Determinare i coefficienti di Fourier a_0, a_1, b_1 e la somma della serie di Fourier in $x = \frac{\pi}{2}$.

. . . .

Risposta [3 punti]:

---

1. Determinare il dominio della funzione f definita da

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{\log(x^2+y^2-1)}{4-x^2-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2+y^2-1)}}$$

....

Risposta [3 punti]:

---

2. Si considerino la funzione $g(x,y) = 7^{xy}$ e il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 49y^2 = 1\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

---

3. Siano $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left(x^7 \exp(x^8) \arctan y + \log x\right) \vec{i} + \left(\frac{1}{\alpha(1+y^2)} \exp(x^8)\right) \vec{j}\,.$$

Si determinino il dominio A ed il valore di α per cui il campo vettoriale è conservativo in A. In corrispondenza di tale valore di α si calcoli un potenziale per $\vec{F}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T (x+z)\, dxdydz\,,$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4\,,\ 1 \le z \le \sqrt{2}\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{7x}{1+(n+1)x} - \frac{7x}{1+nx}\right)\,, \quad x \ge 0\,.$$

(suggerimento: la serie è telescopica: calcolare la ridotta n-esima $S_n(x)$ ...)

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\sin(y - 2\pi) \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Discutere, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità (locale e globale); determinare le soluzioni stazionarie; determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni (pari/dispari); calcolare y''. Al variare di $y_0 \in]2\pi, 4\pi[$, studiare la monotonia delle soluzioni, gli asintoti e discutere l'esistenza di punti di flesso.

. . . .

Risposta [6 punti]:

---

7. Determinare la soluzione $y :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \dfrac{\tan x}{4} y = \dfrac{3\sin x}{4} y^3 \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,. \end{cases}$$

(suggerimento: porre $z = 1/y^2$...)

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione, di periodo 2π, definita in $]-\pi, \pi]$ da $f(x) = \begin{cases} 3|\sin x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e prolungata per periodicità. Determinare i coefficienti di Fourier a_0, a_1, b_1 e la somma della serie di Fourier in $x = \frac{\pi}{2}$.

. . . .

Risposta [3 punti]:
