
Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ EDIQQ ♢ EDILMU

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. Gli esercizi 7 e 8 sono in **ALTERNATIVA**.
5. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
6. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
7. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
8. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^3+2y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$

....

Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(-3,0)$ e $(-3,3)$. Data $g(x,y) = y - x^2$, determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (\alpha x \sin(7\pi y) + y^2)\,\overrightarrow{i} + (7x^2\cos(7\pi y) + \beta xy)\,\overrightarrow{j}$$

è conservativo. Per tali valori di α e β calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ una curva regolare percorsa da $(1,0)$ a $(7,1)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_T 5x(x^2+y^2)\,dxdy$$
dove $T = T_1 \cup T_2$, $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -x^2-4 \le y \le 0, -2 \le x \le 2\}$, $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \ge 0, x^2+y^2 \le 2\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_n(x) = n^{\beta-7} e^{n(x-8)}$$
con $\beta \ge 7$. Si determini, al variare di $\beta \ge 7$, l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi. Nel caso $\beta = 7$ si discuta la validità del passaggio al limite sotto il segno di integrale nell'intervallo $[7,8]$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\alpha \ge 0$. Si consideri la seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}} \arctan\left(\frac{x}{n^{2\alpha}\log(n^2+1)}\right), \qquad x \ge 0\,.$$
Si discuta la convergenza puntuale e totale al variare di $\alpha \ge 0$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare la lunghezza della curva di equazione parametrica $\vec{r}(t) = t^2\cos t\vec{i} + t^2 \sin t\vec{j} + \frac{t^3}{\sqrt{3}}\vec{k}$, dove $t \in [-1, \sqrt{3}]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (y-2) + \arctan(y-2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$

   ....

   Risposta [5 punti]:

---

2. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(-3,0)$ e $(-3,3)$. Data $g(x,y) = y - x^2$, determinare $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ ed i punti in cui sono assunti.

   ....

   Risposta [Calcolo di m e punti di minimo 2 punti, calcolo di M e punti di massimo 2 punti]:

---

3. Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (\alpha x \sin(7\pi y) + y^2)\,\overrightarrow{i} + (7x^2 \cos(7\pi y) + \beta xy)\,\overrightarrow{j}$$

   è conservativo. Per tali valori di α e β calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, essendo Γ una curva regolare percorsa da $(1,0)$ a $(7,1)$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T 5x(x^2 + y^2)\,dxdy$$

   dove $T = T_1 \cup T_2$, $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -x^2 - 4 \leq y \leq 0, -2 \leq x \leq 2\}$, $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

5. Sia data la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = n^{\beta - 7} e^{n(x-8)}$$

   con $\beta \geq 7$. Si determini, al variare di $\beta \geq 7$, l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed, eventualmente, nei suoi sottoinsiemi. Nel caso $\beta = 7$ si discuta la validità del passaggio al limite sotto il segno di integrale nell'intervallo $[7,8]$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

6. Sia $\alpha \geq 0$. Si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}} \arctan\left(\frac{x}{n^{2\alpha}\log(n^2+1)}\right), \qquad x \geq 0\,.$$

Si discuta la convergenza puntuale e totale al variare di $\alpha \geq 0$.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

7. Calcolare la lunghezza della curva di equazione parametrica $\vec{r}(t) = t^2\cos t\vec{i} + t^2\sin t\vec{j} + \frac{t^3}{\sqrt{3}}\vec{k}$, dove $t \in [-1, \sqrt{3}]$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-2) + \arctan(y-2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza locale e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni.

. . . .

Risposta [4 punti]:
