Analisi Matematica II — 3 FEBBRAIO 2011 — FOGLIO A

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ MECLT ♢ MATLT ♢ AUTLT ♢ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+\sin(7x)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = x+y+2$ nel dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$. Detti $m = \min_T f$ e $M = \max_T f$, determinare m, M ed i punti in cui essi vengono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

---

3. Dopo aver determinato per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale piano

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(e^{x^7} + \alpha y^3\right)\overrightarrow{i} + 2xy^2\overrightarrow{j}$$

è conservativo in $\mathbb{R}^2$, per tale valore di α si calcoli il lavoro compiuto dal campo $\overrightarrow{F}$ lungo $\Gamma :\ \overrightarrow{r}(t) = (1+\cos t)\overrightarrow{i} + (1+\sin t)\overrightarrow{j}\,,\quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso S, dove $\vec{F}(x, y, z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ e S è la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, interna al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \sqrt[3]{x + \frac{4}{n}}$. Si determini il limite puntuale f e gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$ (si osservi che $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ se e solo se $a > b$). Il limite puntuale f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$?

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 7|\tan x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; siano $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1. Calcolare $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3 \cos y \, e^{y^2} , \\ y(0) = y_0 \, . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, la monotonia della soluzione e gli asintoti.

....

Risposta [5 punti]:

---

8. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\iint_T 2|xy|\,dxdy$, dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{49} + y^2 \leq 1\}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+\sin(7x)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

2. Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = x+y+2$ nel dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$. Detti $m = \min_T f$ e $M = \max_T f$, determinare m, M ed i punti in cui essi vengono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]:

---

3. Dopo aver determinato per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale piano

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(e^{x^7} + \alpha y^3\right)\overrightarrow{i} + 2xy^2\overrightarrow{j}$$

è conservativo in $\mathbb{R}^2$, per tale valore di α si calcoli il lavoro compiuto dal campo $\overrightarrow{F}$ lungo $\Gamma: \overrightarrow{r}(t) = (1+\cos t)\overrightarrow{i} + (1+\sin t)\overrightarrow{j}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

....

Risposta [4 punti]:

---

4. Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso S, dove $\vec{F}(x,y,z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ e S è la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2 = 2$, interna al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

....

Risposta [4 punti]:

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \sqrt[3]{x + \frac{4}{n}}$. Si determini il limite puntuale f e gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$ (si osservi che $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ se e solo se $a > b$). Il limite puntuale f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$?

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 7|\tan x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; siano $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ $n \in \mathbb{Z}^+$ i suoi coefficienti di Fourier. Calcolare a_0, a_1, b_1. Calcolare $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3 \cos y \, e^{y^2} , \\ y(0) = y_0 \, . \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità localmente e globalmente e le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, la monotonia della soluzione e gli asintoti.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\iint_T 2|xy| \, dxdy$, dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{49} + y^2 \leq 1\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:
